ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

UNTER MITWIRKUNG VON K. BEYER VDI, G. HAMEL VDI, L. PRANDTL VDI UND C. WEBER. HERAUSGEGEBEN VON FR. A. WILLERS, DRESDEN

:: Band 18 :: Seite 319 bis 382

:: Heft 6 :: Dezember 1938

INHALT:



VDI-VERLAG G.M.B.H., BERLIN NW 7

Englisch-französische Titelerläuterungen der in Band XVIII, Heft 6 der „ZAMM" (1938) veröffentlichten Hauptaufsätze.

v. Borbély in Berlin.

On non-stationary spatial flow around a wing. The problem of plane flow around an (infinite) oscillating wing has already been solved. The author treats first with sufficient completeness the (spatial) case of a finite supporting line with an elliptical vortex distribution. Then he shows that these results may be combined in order to study the finite oscillating wing with elliptical vortex distribution whose depth is small in comparison with its span, and obtains approximate formulae for the flow in the neighbourhood of the wing and for the angle of attack.

Sur l'écoulement spatial non-stationnaire autour d'une aile. Le problème de l'écoulement plan autour d'une aile (infinie) oscillante est déjà résolu. L'auteur traite d'abord dans des conditions suffisamment larges le cas (spatial) d'une ligne portante finie entourée de tourbillons à distribution elliptique. Ensuite il sait combiner ces deux résultats pour étudier l'aile oscillante finie à distribution elliptique des tourbillons, sous la condition que sa profondeur soit petite par rapport à son envergure. Il déduit des formules approchées pour les vitesses au voisinage de l'aile et pour l'angle d'attaque.

A. Kneschke in Dresden.

On the motion of vortices. The paper deals with the motion of isolated vortices in any simply connected plane domain. The author establishes a relation between the kinetic energy and Kirchhoff's „Bahnfunktion" and deduces the formula for its transformation corresponding to conformal mapping of the domain. The motion may also be derived from a variational principle.

Sur le mouvement des tourbillons. L'auteur étudie le mouvement de tourbillons isolés dans un domaine plan simplement connexe quelconque, en calcule l'énergie cinétique qu'il met en relation avec la „Bahnfunktion" de Kirchhoff, et donne la formule pour la transformation de cette énergie correspondant à une représentation conforme du domaine. Le mouvement peut aussi être déduit d'un principe de minimum.

E. Reuß in Budapest.

On Lüders-Hartmann lines. The paper is concerned with the formation of gliding surfaces in an elastic body at the yield point, as shown experimentally by the Lüders-Hartmann lines. The author considers, as a typical case, the twisting of a cylinder of any cross-section. At the yield point the material will still follow Hooke's law nearly everywhere, but there must be some surfaces (gliding surfaces) where it behaves like a plastic body. Castigliano's principle shows these surfaces to be portions of planes parallel to the axis of the cylinder. The strain and stress, and in particular their discontinuities on the gliding surfaces, may be calculated by means of the logarithmic potential of a simple distribution on the gliding surfaces, whereof the density is determined by an integral equation of the first kind.

Sur les lignes de Lüders-Hartmann. Il s'agit de la formation des surfaces de glissement dans un corps élastique à la limite d'écoulement, surfaces mises en évidence expérimentalement par les lignes de Lüders-Hartmann. L'auteur considère comme cas typique la torsion d'un cylindre de section quelconque, A la limite d'écoulement le matériel obéit encore presque partout à la loi de Hooke, mais il doit y avoir quelques surfaces (surfaces de glissement) où il se comporte comme un corps plastique. En vertu du principe de Castigliano ces surfaces sont des portions de plans parallèles à l'axe du cylindre. Pour calculer les déformations et les efforts, et en particulier leurs discontinuités aux surfaces de glissement, l'auteur se sert du potentiel logarithmique d'une simple couche étendue sur les surfaces de glissement. La densité en est déterminée par une équation intégrale de première espèce.

ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK

INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 18 | Dezember 1938 | Heft 6

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Über einen Grenzfall der instationären räumlichen Tragflügelströmung*).

Aus dem Flugtechnischen Institut der T. H. Berlin. Leiter: Prof. Dr.-Ing. Herbert Wagner.

Von *v. Borbély* in Berlin.

Die Grundaufgabe der Tragflügeltheorie, zu einem Flügel mit endlicher Spannweite die zugehörigen Luftkräfte zu berechnen, ist schon beim stationären Problem nicht einfach. Die strenge Lösung der entsprechenden Aufgabe für den nicht-stationären Fall erscheint noch wesentlich schwieriger.

Den prinzipiellen Ansatz könnte man in Anlehnung an die Idee der tragenden Wirbelfläche, die im stationären räumlichen und ebenen instationären Fall durchgeführt worden ist[1])[2]), folgendermaßen formulieren:

Der Flügel wird als unendlich dünn vorausgesetzt und als Trennungsfläche (Diskontinuitätsfläche der Geschwindigkeit) aufgefaßt, also durch flächenhaft verteilte Wirbel ersetzt. Die Zirkulationsdichte dieser Trennungsschicht ist zeitlich und örtlich variabel und fürs erste unbekannt. Der Gesamtänderung der Zirkulationsdichte der gebundenen Wirbel entsprechend entsteht nach dem Helmholtzschen Satz eine weitere, aus freien Wirbeln bestehende Trennungsfläche, die von der Strömung mitgeführt wird. Für hinreichend kleinen Auftrieb ist die Deformation der abgehenden Wirbelfläche zu vernachlässigen. Man kann dann nach dem Biot-Savartschen Gesetz aus der Zirkulationsdichte des gesamten Wirbelsystems das zugehörige induzierte Geschwindigkeitsfeld in allgemeiner Form angeben. Die Zirkulationsdichte der gebundenen Wirbelfläche ist nun so zu bestimmen, daß das resultierende Geschwindigkeitsfeld an der Oberfläche des bewegten Flügels die geometrische Grenzbedingung erfüllt. Damit sind auch die am Flügel wirkenden Luftkräfte ohne weiteres bekannt.

Die Lösung der obigen Fragestellung bietet jedoch fürs erste zu große Schwierigkeiten. Darum versuchen wir im folgenden den Einfluß der endlichen Spannweite auch beim nichtstationären Fall wenigstens in erster Näherung analog dem Prandtlschen Gedanken durch eine Korrekturgröße zu erfassen.

*) Auszug aus der von der Technischen Hochschule Berlin angenommenen Dr.-Ing.-Dissertation des Verfassers. Referenten: Prof. Dr. R. Rothe und Prof. Dr. G. Hamel.

Herrn Prof. Rothe und seinem ehemaligen ständigen Assistenten Herrn Prof. Dr.-Ing. G. Grüß möchte ich auch an dieser Stelle für die vielen Förderungen meiner Berliner Jahre aufrichtig danken.

[1]) Birnbaum: Die tragende Wirbelfläche als Hilfsmittel zur Behandlung des ebenen Problems der Tragflügeltheorie. ZAMM Bd. 3 (1923), S. 290.

[2]) Birnbaum: Das ebene Problem des schlagenden Flügels. ZAMM Bd. 4 (1924), S. 277.

In der xy-Ebene des xyz-Raumes liege im Bereich $x = a \ldots a + t$, $y = -b \ldots + b$ der Flügel von der Tiefe t und Spannweite $2b$ (Abb. 1). Die Zirkulationsdichte der entsprechenden gebundenen Wirbelfläche sei zeitlich (τ) mit der Frequenz σ harmonisch veränderlich. Für jeden Zeitpunkt der Schwingung sei in Richtung der Spannweite die Zirkulationsdichte willkürlich als elliptisch vorausgesetzt. Die Zirkulationsverteilung in Richtung der Tiefe nehmen

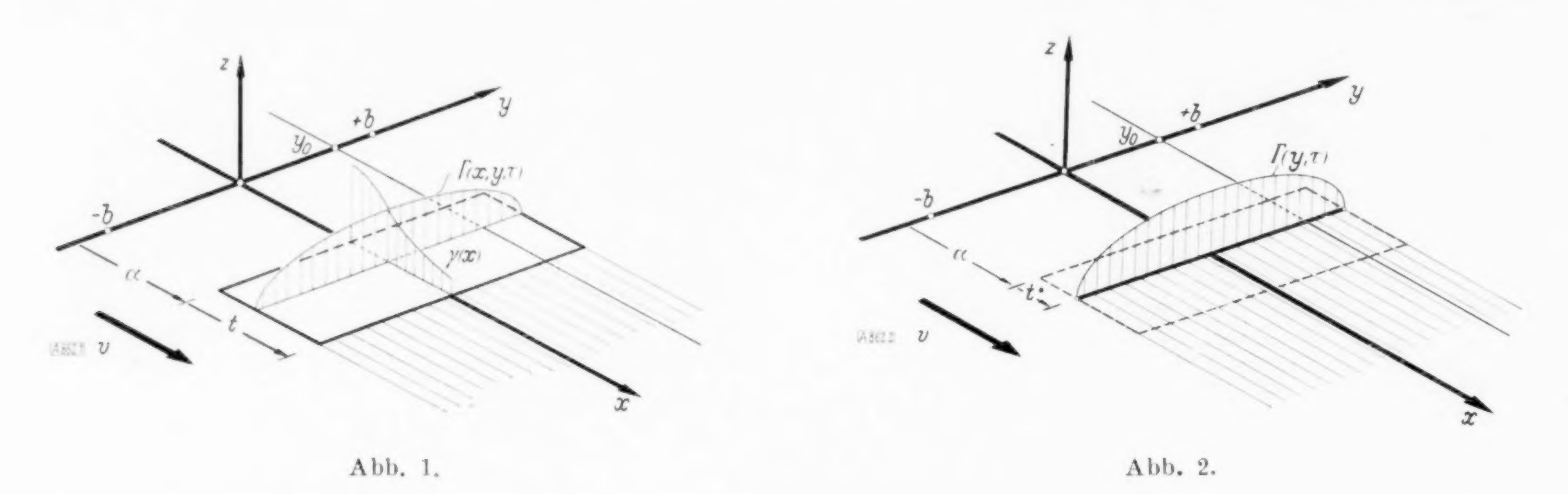


Abb. 1. Abb. 2.

wir als reell an[3]), über ihre Größe $\gamma(x)$ wollen wir dagegen keine Festsetzung treffen. V (parallel zur positiven x-Achse) sei die Anströmgeschwindigkeit der Flüssigkeit in großer Entfernung vom Flügel. Die Zirkulationsdichte der gebundenen Wirbelfläche läßt sich also in diesem Fall

1. (Flügel, räumlich) in der Form

$$\Gamma(x, y; \tau) = \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \gamma(x)\, e^{i\sigma\tau}$$

darstellen. Nun betrachten wir unter denselben Verhältnissen wie oben hilfsweise folgende drei weitere Fälle der gebundenen Wirbelverteilung:

2. (Faden, räumlich). An der Stelle $x = a + t^*$ (t^* = Schwerpunktsabszisse der $\gamma(x)$ Fläche) liege ein gebundener Wirbelfaden (Abb. 2), dessen Zirkulationsdichte durch

$$\Gamma(y; \tau) = \Gamma_2 \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} e^{i\sigma\tau}$$

gegeben sein möge. Γ_2 sei so bestimmt, daß die Gesamtzirkulation des Falles 1 pro Längeneinheit der Spannweite mit der entsprechenden Gesamtzirkulation des Falles 2 übereinstimmen soll.

3. (Flügel, eben). Im Bereich $x = a \ldots a + t$ liege eine in Richtung der Spannweite unbegrenzte gebundene Wirbelfläche mit der Zirkulationsdichte $\Gamma(x; \tau) = \Gamma_3 \gamma(x)\, e^{i\sigma\tau}$ und weiterhin

4. (Faden, eben) an der Stelle $x = a + t^*$ ein unendlich langer Wirbelfaden mit der Zirkulationsdichte $\Gamma(\tau) = \Gamma_4 e^{i\sigma\tau}$, wobei wiederum die Gesamtzirkulationen pro Längeneinheit in Richtung der Spannweite im Falle 3 und 4 übereinstimmen mögen, d. h. es sei

$$\Gamma_3 \int_a^{a+t} \gamma(x)\, dx = \Gamma_3 \Gamma_2 = \Gamma_4 .$$

Aus den Zirkulationsdichten der gebundenen Wirbel ermitteln wir im § 1 ... 3 für alle oben angeführten Fälle die Zirkulationsdichten der zugehörigen freien Wirbelflächen und aus der Gesamtzirkulation vermöge des Biot-Savartschen Gesetzes

$$d\mathfrak{v} = \frac{1}{4\pi} \frac{[\Gamma_{\text{ges}}\, d\mathfrak{s}, \mathfrak{r}]}{|\mathfrak{r}|^3}$$

die in der xy-Ebene induzierten Geschwindigkeiten. Diese Geschwindigkeiten stehen zur xy-Ebene senkrecht, wir geben daher im folgenden nur ihre Beträge an und nennen sie

[3]) Entsprechendes gilt auch bei komplexer $\gamma(x)$ Verteilung.

Abwindgeschwindigkeit w. Die beigefügten Indizes entsprechen der Numerierung der einzelnen Fälle.

Die Zirkulationsdichten und somit auch die Abwindgeschwindigkeiten der beiden räumlichen Fälle sind durch die obigen Festsetzungen eindeutig bestimmt, die der beiden ebenen Fälle enthalten dagegen noch einen willkürlichen reellen Faktor Γ_3, über den wir nun folgendermaßen verfügen wollen:

Wir betrachten längs der Geraden $z=0$, $-b<y=y_0<+b$ die Abwindgeschwindigkeit der beiden räumlichen Fälle 1, 2 und vergleichen sie mit den entsprechenden Geschwindigkeiten derjenigen beiden ebenen Fälle 3, 4, deren gebundene Zirkulationsdichte pro Längeneinheit der Spannweite mit der gebundenen Zirkulationsdichte der räumlichen Fälle im betrachteten Schnitt $y=y_0$ übereinstimmt. Das heißt, es soll sein $\Gamma_3=\frac{\sqrt{b^2-y_0^2}}{b}$. Durch diese Festsetzung von Γ_3 ist nun längs jedes festen Schnittes $y=y_0$ $(-b<y<+b)$ zu der Geschwindigkeitsverteilung $w_1(x, y_0; \tau)$, $w_2(x-t^*, y_0; \tau)$ des räumlichen Flügel- und Fadenfalles die durch die Wahl von y_0 eindeutig bestimmte Geschwindigkeitsverteilung $w_3(x, y_0; \tau)$, $w_4(x-t^*, y_0; \tau)$ des vergleichsweise herangezogenen ebenen Flügel- und Fadenfalles zugeordnet.

Im § 4 wollen wir zeigen, daß in hinreichend großer, jedoch endlicher Entfernung x vor dem Flügel auch für endliches $\frac{t}{2b}$

$$w_{1,3}=w_{2,4}\left[1+0\left(\frac{c}{x}\right)\right]$$

gilt. Dabei wird wie üblich mit $0(\xi^\mu)$ eine Funktion bezeichnet, für die $\lim_{\xi\to 0}\frac{0(\xi^\mu)}{\xi^\mu}=\text{konst.}\neq 0$ gilt.

Hinter dem Flügel ist dagegen eine solche Übereinstimmung auch in beliebig großer Entfernung nur in der Grenze kleiner Flügeltiefen im Verhältnis zur Spannweite, also mit $\frac{t}{2b}\to 0$ zu erzielen.

Im § 5 zeigen wir weiterhin, daß auch in unmittelbarer Umgebung des Flügels (und für die Berechnung der Korrekturgröße ist dieser Bereich der ausschlaggebende) die Grenzwertgleichung

$$\lim_{\frac{t}{2b}\to 0}\left[\{w_1(x, y_0; \tau)-w_3(x, y_0; \tau)\}-\{w_2(x-t^*, y_0; \tau)-w_4(x-t^*, y_0; \tau)\}\right]=\lim_{\frac{t}{2b}\to 0} 0\left(\frac{t}{2b}\ln\frac{t}{2b}\right)=0$$

mit $a\ldots x, t^*\ldots a+t$ gilt, d. h.

$$w_1(a, y_0; \tau)=w_3(a, y_0; \tau)+\lim_{\frac{t}{2b}\to 0}\{w_2(x-t^*, y_0; \tau)-w_4(x-t^*, y_0; \tau)\}.$$

Es ist also für kleine $|x-a|$ in erster Näherung

$$w_1\approx w_3+D(0, y_0; \tau). \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A).$$

Wir beschränken uns daher im folgenden auf sehr kleine Flügeltiefen im Verhältnis zur Spannweite, d. h. auf den Grenzfall $\frac{t}{2b}\to 0$.

Nun betrachten wir im ebenen Vergleichsfall 3 unter Berücksichtigung der Festsetzung von Γ_3 einen Flügelschnitt an der Stelle y_0 und versehen dieses Flügelelement mit der zur Anströmrichtung senkrechten Zusatzgeschwindigkeit $D(0, y_0; \tau)$, oder (was auf dasselbe hinauskommt) wir korrigieren den Anstellwinkel des betrachteten ebenen Flügels um das Zusatzglied $\frac{D}{V}$, so erhalten wir bei variablem y_0 einen räumlich und zeitlich verwunden schwingenden Flügel, der in der Grenze für kleine Flügeltiefe mit dem schwingenden räumlichen Flügel gleichwertig ist.

Wir können also die bekannte Lösung des harmonisch bewegten ebenen Flügels[4][5]) als Ausgangswert nehmen und brauchen nur die Neigung des Flügelprofils im ebenen Vergleichsfall 3 (unter Berücksichtigung der Festsetzung von Γ_3) an jeder Stelle der Spannweite um das rechtsstehende Korrekturglied zu vergrößern, um in erster Näherung den Einfluß der endlichen Spannweite in diesem speziellen Fall der Wirbelverteilung zu erhalten, wobei wir zur Bestimmung des Korrekturgliedes nur die rechnerisch wesentlich einfacher zu behandelnden Fälle der instationären Einzelfäden zu betrachten brauchen.

[4]) Küßner: Schwingungen von Flugzeugflügeln. Luftf.-Forschg., Bd. 4 (1929).
[5]) Kaßner u. Fingado: Das ebene Problem der Flügelschwingung. Luftf.-Forschg., Bd. 13 (1936), S. 374.

1. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld eines unendlich langen gebundenen Wirbelfadens mit zeitlich harmonisch veränderlicher Zirkulation. In der xy-Ebene des rechtwinkligen xyz-Raumes liege an der Stelle $x=a$ parallel zur y-Achse ein unendlicher gebundener Wirbelfaden (Abb. 3). Die den gebundenen Wirbel umgebende Flüssigkeit ströme mit der Geschwindigkeit V parallel in Richtung der positiven x-Achse. Die Wirbelstärke des gebundenen Wirbelfadens sei $\Gamma(\tau)=\Gamma_4 e^{i\sigma\tau}$. Nach den Helmholtzschen Wirbelsätzen wird

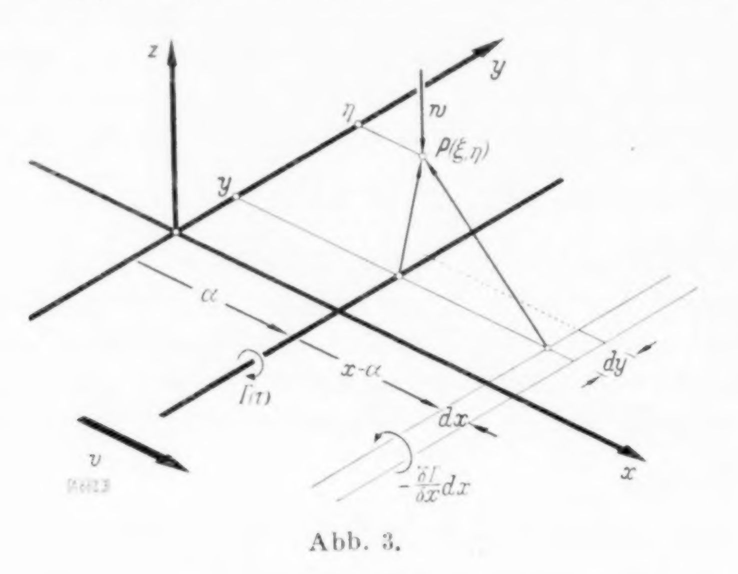


Abb. 3.

sich von dem gebundenen Wirbelfaden der (zeitlichen) Änderung seiner Wirbelstärke entsprechend ein System von entgegengesetzt gerichteten freien Wirbeln ablösen, welche als Trennungsschicht von der Strömung mitgeführt werden. Zur Zeit τ_1 hat der gebundene Wirbel die momentane Wirbelstärke $\Gamma(\tau_1)$. Sehen wir in erster Näherung von der Deformation der abgehenden Trennungsschicht ab, so wird in der Zeit $\tau_2-\tau_1$ die Änderung der gebundenen Wirbelstärke zur Zeit τ_1 von der Strömung an die Stelle $x_1=a+V(\tau_2-\tau_1)$ mitgeführt und bildet dort einen freien Wirbel von der Stärke

$$-\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\,dx=-\Gamma_4\, i\,\frac{\sigma}{V}\,e^{i\sigma\tau}\,dx.$$

Nach genügend langer Zeit wird sich also in der Flüssigkeit folgendes Wirbelsystem befinden: An der Stelle $x=a$ der gebundene Wirbelfaden von der Stärke $\Gamma(\tau)=\Gamma_4 e^{i\sigma\tau}$ und im Bereich $a<x<\infty$ die abgehende Wirbelfläche mit der Wirbeldichte

$$-\frac{\partial\Gamma}{\partial x}\,dx=-\Gamma_4\, i\,\frac{\sigma}{V}\,e^{i\sigma\left(\tau-\frac{x-a}{V}\right)}\cdot dx.$$

Durch das gesamte Wirbelsystem wird an der Stelle $P(\xi,\eta)$ eine Abwärtsgeschwindigkeit w induziert, deren Größe nach dem Biot-Savartschen Gesetz

$$4\pi w_4=\Gamma_4 e^{i\sigma\tau}\int\limits_{y=-\infty}^{+\infty}\frac{(a-\xi)\,dy}{\sqrt{(a-\xi)^2+(\eta-y)^2}^{\,3}}-\Gamma_4\, i\,\frac{\sigma}{V}\,e^{i\sigma\tau}\int\limits_{x=a}^{\infty}\int\limits_{y=-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\frac{\sigma}{V}(x-a)}(x-\xi)\,dx\,dy}{\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}^{\,3}}$$

oder

$$2\pi e^{-i\sigma\tau} w_4=\frac{\Gamma_4}{a-\xi}-\Gamma_4\, i\,\frac{\sigma}{V}\int\limits_{x=a}^{\infty}\frac{e^{-i\frac{\sigma}{V}(x-a)}}{x-\xi}\,dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

beträgt. Setzen wir $\frac{\sigma}{V}(x-\xi)=u$ und $\frac{\sigma}{V}=\mu$, so ergibt sich[6])

$$2\pi e^{-i\sigma\tau} w_4=\frac{\Gamma_4}{a-\xi}-\Gamma_4\, i\,\mu\, e^{i\mu(a-\xi)}\int\limits_{u=\mu(a-\xi)}^{\infty}\frac{e^{-iu}}{u}\,du$$

$$=\frac{\Gamma_4}{a-\xi}+\Gamma_4\, i\,\mu\, e^{i\mu(a-\xi)}\left\{Ci\,(\mu(a-\xi))+i\left[\frac{\pi}{2}-Si\,(\mu(a-\xi))\right]\right\}.$$

[6]) Jahnke-Emde: Funktionentafeln mit Formeln und Kurven. 2. Aufl. (1933).

2. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld einer unendlich langen gebundenen Wirbelfläche von der Tiefe t, deren Zirkulation zeitlich harmonisch veränderlich ist. Setzen wir in die Gl. (1) des vorigen Paragraphen an Stelle von a x_1 und betrachten einen gebundenen Wirbelstreifen von der Breite $d\,x_1$ und der Zirkulationsdichte $\Gamma_4 = \Gamma_3\,\gamma(x_1)$, so liefert Gl. (1) die Abwindgeschwindigkeit dieses Wirbelstreifens an der Stelle ξ. Durch Summation aller Wirbelstreifen über die Tiefe t der gebundenen Wirbelfläche (wobei nötigenfalls der Cauchysche Hauptwert der Integrale zu nehmen ist) erhalten wir also die zur gebundenen Wirbelfläche mit der Zirkulationsdichte $\Gamma_3\,\gamma(x_1)\,e^{i\sigma\tau}$ zugehörige Abwindgeschwindigkeit:

$$2\pi w_3\, e^{-i\sigma\tau} = \Gamma_3 \int\limits_{x_1=a}^{a+t} \frac{\gamma(x_1)\,d\,x_1}{x_1-\xi} - \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{x_1=a}^{a+t} \gamma(x_1)\, e^{i\mu x_1} \int\limits_{x=x_1}^{\infty} \frac{e^{-i\mu x}}{x-\xi}\, d\,x\, d\,x_1 \quad \ldots \ldots (2).$$

Vertauschen wir im Doppelintegral die Reihenfolge der Integrationen, so ergibt sich das von Prandtl und Birnbaum[1][2][7]) auf andere Art hergeleitete Ergebnis der Abwindgeschwindigkeit einer unendlichen gebundenen Wirbelfläche:

$$\left.\begin{aligned} 2\pi w_3\, e^{-i\sigma\tau} = {} & \Gamma_3 \int\limits_{x_1=a}^{a+t} \frac{\gamma(x_1)\,d\,x_1}{x_1-\xi} - \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{x=a}^{a+t} \frac{e^{-i\mu x}}{x-\xi} \int\limits_{x_1=a}^{x} \gamma(x_1)\, e^{i\mu x_1}\, d\,x_1\, d\,x \\ & - \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{x=a+t}^{\infty} \frac{e^{-i\mu x}}{x-\xi}\, d\,x \int\limits_{x_1=a}^{a+t} \gamma(x_1)\, e^{i\mu x_1}\, d\,x_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots (2').$$

Es ist leicht ersichtlich, daß die erste der obigen Gl. auch in der Form

$$2\pi w_3\, e^{-i\sigma\tau} = \Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{t} \frac{\gamma(u)\,d\,u}{a-\xi+u} - \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{u=0}^{t} \gamma(u)\, e^{i\mu u} \int\limits_{v=u}^{\infty} \frac{e^{-i\mu v}}{a-\xi+v}\, d\,v\, d\,u$$

und die zweite

$$\begin{aligned} 2\pi w_3\, e^{-i\sigma\tau} = {} & \Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{t} \frac{\gamma(u)\,d\,u}{a-\xi+u} + \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{v=0}^{t} \frac{e^{-i\mu v}}{a-\xi+v} \int\limits_{u=v}^{t} \gamma(u)\, e^{i\mu u}\, d\,u\, d\,v \\ & - \Gamma_3\, i\,\mu \int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu v}}{a-\xi+v}\, d\,v \int\limits_{u=0}^{t} \gamma(u)\, e^{i\mu u}\, d\,u \end{aligned}$$

geschrieben werden kann.

3. Das induzierte Geschwindigkeitsfeld einer Wirbelfläche von endlicher Spannweite und Tiefe, mit zeitlich harmonisch und in Richtung der Spannweite elliptisch veränderlicher Zirkulation.

Wir betrachten nun an der Stelle $x = a$ einen gebundenen Wirbelfaden von der Spannweite $2b$, dessen Zirkulationsverteilung durch

$$\Gamma(y;\tau) = \Gamma_2\, \frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b}\, e^{i\sigma\tau}$$

dargestellt sein möge. Der Gesamtänderung von Γ entsprechend wird von dem gebundenen Wirbelfaden eine Trennungsfläche abgehen, die von der Strömung in erster Näherung in der xy-Ebene mit der Geschwindigkeit V mitgeführt wird (Abb. 4).

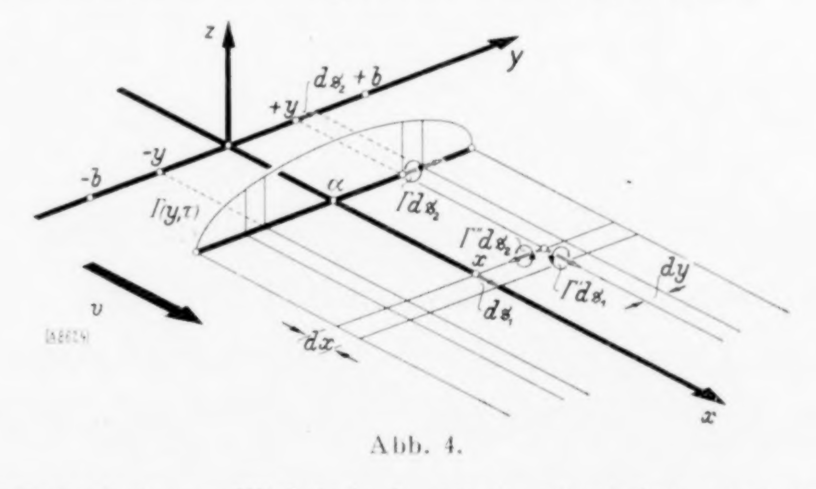


Abb. 4.

[7]) Prandtl: Über die Entstehung von Wirbeln in der idealen Flüssigkeit. Vorträge aus dem Gebiete der Hydro- und Aerodynamik, S. 18. (Innsbrucker Tagung 1922). Berlin (1924.)

Um die Zirkulationsverteilung der Trennungsfläche zu bestimmen, betrachten wir als erstes einen festen Zeitpunkt τ und schreiten längs der Spannweite von y nach $y + dy$ fort. Dabei ändert sich Γ um $\frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy$. Der durch diese Änderung erzeugte abgehende Wirbelstreifen wird durch den Vektor der Zirkulationsdichte

$$\Gamma'(x, y; \tau)\, d\mathfrak{s}_1 = -\frac{\partial \Gamma}{\partial y} dy\, d\mathfrak{s}_1 = \Gamma_2\, e^{i\sigma\left(\tau - \frac{x-\alpha}{V}\right)} \frac{y}{b\sqrt{b^2 - y^2}} dy\,(\mathfrak{i}\, dx)$$

bestimmt. Betrachten wir nun zwei solche Wirbelstreifen an den Stellen $y = \pm y_1$, so ist es klar, daß sie den Schließungsbedingungen des Helmholtzschen Satzes nur dann entsprechen, falls von y_1 nach $-y_1$ eine in x dichte Folge von Wirbelstreifen mit dem Zirkulationsvektor

$$-\frac{\partial \Gamma'}{\partial x} dx\, \mathfrak{j} = \Gamma_2\, i\, \frac{\sigma}{V}\, e^{i\sigma\left(\tau - \frac{x-\alpha}{V}\right)} \frac{y_1}{b\sqrt{b^2 - {y_1}^2}} (dx\, \mathfrak{j})$$

liegt, entsprechend der örtlichen x-Änderung der Wirbelstärke Γ'.

Zu der abgehenden Wirbelfläche, die aus der örtlichen y-Änderung der Wirbelstärke des gebundenen Wirbelfadens herrührt, gehört also eine zweite Wirbelfläche mit dem Zirkulationsvektor

$$\Gamma''(x, y; \tau) = \int\limits_{y_1 = -b}^{y} \frac{\partial \Gamma'}{\partial x} dx\,(\mathfrak{j}\, dy_1) = -\Gamma_2\, i\, \frac{\sigma}{V}\, e^{i\sigma\left(\tau - \frac{x-\alpha}{V}\right)} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} (\mathfrak{j}\, dx).$$

Der Zirkulationsvektor Γ'' wird aber nun gerade durch die zeitliche Änderung der Wirbelstärke des gebundenen Wirbelfadens erzeugt.

In der Zeit $\tau_1 = \tau - \frac{x - \alpha}{V} \ldots \tau_1 + d\tau$ ändert sich die Zirkulation des gebundenen Wirbelfadens um $\left.\frac{\partial \Gamma}{\partial \tau}\right|_{\tau - \frac{x-\alpha}{V}} \frac{d\tau}{dx} dx$, die damit abgehende Wirbelfläche hat also den Vektor der Zirkulationsdichte

$$\Gamma''(x, y; \tau)\, d\mathfrak{s}_2 = -i\, \Gamma_2 \frac{\sigma}{V}\, e^{i\sigma\left(\tau - \frac{x-\alpha}{V}\right)} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} dx\,(\mathfrak{j}\, dy).$$

Aus dem Vektor der Zirkulationsdichte des gebundenen Wirbels $\Gamma d\mathfrak{s}_2$ und dem der abgehenden Wirbelfläche $\Gamma' d\mathfrak{s}_1 + \Gamma'' d\mathfrak{s}_2$ baut sich somit das Wirbelsystem des schwingenden endlichen Wirbelfadens auf.

Die von dem ganzen Wirbelsystem im Punkt $P(\xi, \eta)$ induzierte Abwärtsgeschwindigkeit w wird sich durch Überlagerung der von den einzelnen Wirbelelementen induzierten elementaren Abwärtsgeschwindigkeiten ergeben. Es ist somit

$$\left.\begin{aligned}
4\pi e^{-i\sigma\tau} w_2 = {} & \Gamma_2 \int\limits_{y=-b}^{+b} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \frac{(a - \xi)}{\sqrt{(a - \xi)^2 + (\eta - y)^2}^{\,3}} dy \\
& + \Gamma_2 \int\limits_{x=\alpha}^{\infty} \int\limits_{y=-b}^{+b} e^{-i\mu(x-\alpha)} \frac{y}{b\sqrt{b^2 - y^2}} \frac{(\eta - y)\, dx\, dy}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (\eta - y)^2}^{\,3}} \\
& - \Gamma_2\, i\, \mu \int\limits_{x=\alpha}^{\infty} \int\limits_{y=-b}^{+b} e^{-i\mu(x-\alpha)} \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} \frac{(x - \xi)\, dx\, dy}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (\eta - y)^2}^{\,3}}
\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (3).$$

Setzen wir nun statt α x_1 und $d\Gamma_2 = \gamma(x_1)\, dx_1$, so ergibt die obige Gleichung die Abwärtsgeschwindigkeit eines Wirbelstreifens mit der Zirkulationsdichte $\gamma(x_1) \frac{\sqrt{b^2 - y^2}}{b} e^{i\sigma\tau}$. Durch Summation über x_1 von $a \ldots a + t$ erhalten wir die Geschwindigkeitsverteilung eines Rechteckflügels mit der Spannweite $S = 2b$ und Tiefe t $\left(\text{reziproke Flügelstreckung } \Omega = \frac{t}{S}\right)$, dessen Wirbeldichte in Richtung der Spannweite einen elliptischen, in Richtung der Tiefe dagegen den willkürlichen $\gamma(x)$ Verlauf besitzt.

$$\left.\begin{aligned}4\pi w_1 e^{-i\sigma\tau} &= \int\limits_{x_1=a}^{a+t}\int\limits_{y=-b}^{+b}\gamma(x_1)\frac{\sqrt{b^2-y^2}}{b}\frac{(x_1-\xi)\,d x_1\,d y}{\sqrt{(x_1-\xi)^2+(\eta-y)^2}^{\,3}}\\ &+\int\limits_{x_1=a}^{a+t}\int\limits_{x=x_1}^{\infty}\int\limits_{y=-b}^{+b}\gamma(x_1)\,e^{-i\mu(x-x_1)}\frac{y(\eta-y)\,d x\,d y\,d x_1}{b\sqrt{b^2-y^2}\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}^{\,3}}\\ &-\int\limits_{x_1=a}^{a+t}\int\limits_{x=x_1}^{\infty}\int\limits_{y=-b}^{+b}\gamma(x_1)\,e^{-i\mu(x-x_1)}\frac{\sqrt{b^2-y^2}\,(x-\xi)\,d x\,d y\,d x_1}{b\sqrt{(x-\xi)^2+(\eta-y)^2}^{\,3}}\end{aligned}\right\}\quad .\quad (4)$$

oder dimensionslos geschrieben mit $a-\xi=b\,l$ und $\eta \,\|\, \eta\, b$ für die betrachteten vier Fälle

$$2\pi e^{-i\sigma\tau}w_4=\frac{\Gamma_4}{b\,l}-\Gamma_4\,i\mu\,e^{i\mu b l}\int\limits_{v=l}^{\infty}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,d v \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1\,a),$$

$$\left.\begin{aligned}2\pi e^{-i\sigma\tau}w_3 &= \Gamma_3\int\limits_{v=0}^{2\Omega}\frac{\gamma(v)\,d v}{v+l}-\Gamma_3\,i\mu b\int\limits_{u=0}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\int\limits_{v=u}^{\infty}\frac{e^{-i\mu b v}}{v+l}\,d v\,d u\\ &=\Gamma_3\int\limits_{v=0}^{2\Omega}\frac{\gamma(v)\,d v}{v+l}+\Gamma_3\,i\mu b\int\limits_{v=0}^{2\Omega}\frac{e^{-i\mu b v}}{v+l}\int\limits_{u=v}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,d u\,d v\\ &-\Gamma_3\,i\mu b\,e^{i\mu b l}\int\limits_{v=l}^{\infty}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,d v\cdot\int\limits_{u=0}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,d u\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \quad (2\,a),$$

$$\left.\begin{aligned}4\pi e^{-i\sigma\tau}w_2 &= \frac{\Gamma_2}{b}\,l\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{l^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\,d u\\ &-\Gamma_2\,i\mu\,e^{i\mu b l}\int\limits_{v=l}^{\infty}e^{-i\mu b v}\,v\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\,d u\,d v\\ &+\frac{\Gamma_2}{b}\,e^{i\mu b l}\int\limits_{v=l}^{\infty}e^{-i\mu b v}\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{(\eta-u)}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\,d u\,d v\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; . \quad (3\,a),$$

$$\left.\begin{aligned}4\pi e^{-i\sigma\tau}w_1 &= \int\limits_{v=0}^{2\Omega}\gamma(v)\,(v+l)\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{(v+l)^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\,d u\,d v\\ &-i\mu b\,e^{i\mu b l}\int\limits_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int\limits_{v=l+w}^{\infty}e^{-i\mu b v}\,v\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{\sqrt{1-u^2}\,d u\,d v\,d w}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\\ &+e^{i\mu b l}\int\limits_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int\limits_{v=l+w}^{\infty}e^{-i\mu b v}\int\limits_{u=-1}^{+1}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{(\eta-u)\,d u\,d v\,d w}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}\end{aligned}\right\}\quad . \; . \quad (4\,a),$$

wobei von den rechtsstehenden Ausdrücken der erste den induzierten Geschwindigkeitsanteil der gebundenen Wirbel, der zweite den der Querwirbel und der dritte den der Randwirbel darstellt.

4. Im folgenden wollen wir unter der Voraussetzung, daß der Abstand x des Aufpunktes P von den Flügelkanten größer ist als die Spannweite, die wiederum größer sei als die Flügeltiefe, untersuchen, mit welcher Genauigkeit wir das induzierte Geschwindigkeitsfeld der $\frac{\text{endlichen}}{\text{unendlichen}}$ gebundenen Wirbelfläche $\frac{1}{3}$ durch das entsprechende Geschwindigkeitsfeld

des $\genfrac{}{}{0pt}{}{\text{endlichen}}{\text{unendlichen}}$ gebundenen Wirbelfadens $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{4}$ ersetzen können. Dabei wollen wir den Wirbelfaden in die Schwerpunktsabszisse der $\gamma(x)$ Fläche gelegt denken und die (dimensionslose) Abszisse x des Aufpunktes von der Schwerpunktsabszisse der $\gamma(x)$ Fläche ab messen. Das heißt, wir setzen $x = l + t^*$, wobei wir t^* statt $\frac{t^*}{b}$ schreiben wollen (Abb. 5).

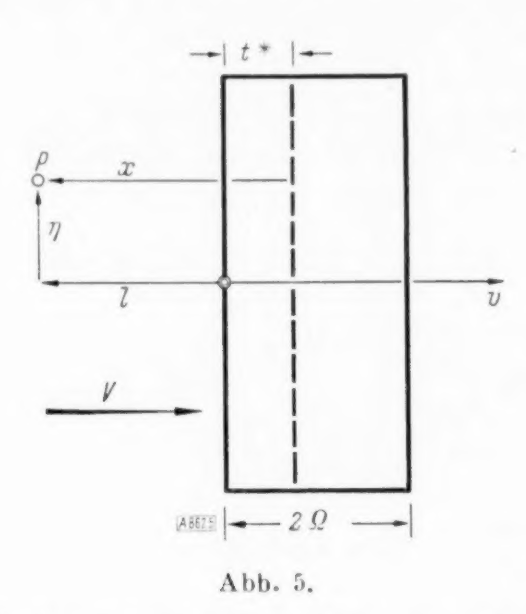


Abb. 5.

Betrachten wir nun der Reihe nach die Anteile der induzierten Geschwindigkeiten der gebundenen und Querwirbel der Fälle 3 und 4, so erhalten wir nach Gl. (1a), (2a):

$$2\pi e^{-i\sigma\tau}(w_3 - w_4)_{\text{geb. W.}} = \Gamma_3 \int\limits_{v=0}^{2\Omega} \frac{\gamma(v)\,dv}{v + x - t^*} - \frac{\Gamma_4}{b\,x} = O\left(\frac{1}{x^3}\int\limits_0^{2\Omega} \gamma(v)\,(v - t^*)^2\,dv\right), \qquad (x \gtrless 0).$$

Ebenso gilt

$$2\pi e^{-i\sigma\tau}(w_3 - w_4)_{\text{Querw.}}$$

$$= -i\mu b\left[\Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\, e^{i\mu b u} \int\limits_{v=u}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v + x - t^*}\,dv\,du - \frac{\Gamma_4}{b}\int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v + x}\,dv\right].$$

Führen wir im ersten Integral $u - t^* = \bar{u}$, $v - t^* = \bar{v}$ ein, so ergibt sich für die eckige Klammer

$$\Gamma_3 \int\limits_{\bar{u}=-t^*}^{2\Omega - t^*} \gamma(\bar{u} + t^*) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(i\mu b\bar{u})^\nu}{\nu!}\left(\int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v + x}\,dv - \int\limits_{v=0}^{u} \frac{e^{-i\mu b v}}{v + x}\,dv\right) d\bar{u} - \frac{\Gamma_4}{b}\int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v + x}\,dv.$$

Nun müssen wir aber $x \gtrless 0$ gesondert betrachten. Im ersten Fall (Aufpunkt liegt vor dem Flügel) ist der Integrand beschränkt. Integrieren wir die inneren Integrale zweimal partiell nach v und führen das Ergebnis in die obige Differenz ein, so erhalten wir

$$\Gamma_3 \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(i\mu b)^\nu}{\nu!} \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\,(u - t^*)^\nu\,du \left[\frac{1}{i\mu b x} - \frac{1}{(i\mu b x)^2} + \frac{2}{(i\mu b)^2}\int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{(v + x)^3}\,dv\right]$$

$$+ \Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\left[\frac{1}{i\mu b x}\left(\frac{1}{1 + \frac{u - t^*}{x}} - e^{i\mu b(u - t^*)}\right) - \frac{1}{(i\mu b x)^2}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{u - t^*}{x}\right)^2} - e^{i\mu b(u - t^*)}\right)\right] du$$

$$- 2\Gamma_3 \frac{1}{(i\mu b)^2} \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\, e^{i\mu b(u - t^*)} \int\limits_{v=0}^{u - t^*} \frac{e^{-i\mu b v}}{(v + x)^3}\,dv\,du$$

$$= 2\Gamma_3 \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{(i\mu b)^{\nu-2}}{\nu!} \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)(u - t^*)^\nu\,du \int\limits_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{(v + x)^3}\,dv + \Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\,\frac{1}{i\mu b x}\left(\frac{1}{1 + \frac{u - t^*}{x}} - 1\right) du$$

$$- \Gamma_3 \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \frac{1}{(i\mu b x)^2}\left(\frac{1}{\left(1 + \frac{u - t^*}{x}\right)^2} - 1\right) du - 2\Gamma_3 \frac{1}{(i\mu b)^2} \int\limits_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u)\, e^{i\mu b(u - t^*)} \int\limits_{v=0}^{u - t^*} \frac{e^{-i\mu b v}}{(v + x)^3}\,dv\,du.$$

Nun gilt aber für $\lambda \geqq 1$ $|\beta| \neq 0$ und im vorliegenden Falle $x + a \gg 1$

$$\left| \int_{a}^{\infty} \frac{e^{i\beta v}}{(v+x)^{\lambda}} \, d v \right| = \left| \frac{1}{i \beta x^{\lambda}} \int_{v=\frac{a}{x}}^{\infty} \frac{d\,(e^{i\beta x v})}{(1+v)^{\lambda}} \right| \leq \frac{2}{\left| \beta x^{\lambda} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{\lambda} \right|} = 0\left(\frac{1}{x^{\lambda}}\right),$$

d. h. es ist

$$2\pi e^{-i o \tau} (w_3 - w_4)_{\text{Querw.}} = 0\left(\frac{1}{x^3} \int_{0}^{2\Omega} \gamma(u)\,(u - t^*)^2 \, d u\right).$$

Wie man nun nach dem Obigen leicht einsieht, ist

$$2\pi\, e^{-i o \tau} (w_4) = 0\left(\frac{1}{x^2} \int_{0}^{2\Omega} \gamma(u)\, d u\right),$$

also gilt in hinreichender Entfernung vor dem Flügel

$$w_3 = w_4\left(1 + 0\left(\frac{t^2}{x}\right)\right).$$

Anders liegen dagegen die Verhältnisse für $x < 0$ (Aufpunkt hinter dem Flügel). Für die Geschwindigkeitsdifferenz der gebundenen Wirbel behält die obige Abschätzung mit $-x \,||\, x$ ihre Gültigkeit. Bei Betrachtung der Querwirbel müssen wir dagegen den Hauptwert des Integrals $(x > 0)$

$$\int_{v=0}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v - x} \, d v = e^{-i\mu b x} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{v=-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-i\mu b v}}{v} \, d v + \int_{\varepsilon}^{x} \frac{e^{-i\mu b v}}{v} \, d v \right)$$

$$+ e^{-i\mu b x} \int_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v} \, d v = -2 i\, e^{-i\mu b x} \int_{0}^{x} \frac{\sin \mu b v}{v} \, d v + e^{-i\mu b x} \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v} \, d v$$

$$\sim -i\pi\, e^{-i\mu b x} + \frac{i}{\mu b x} + \frac{1}{(\mu b x)^2}$$

einführen[6]). Damit ergibt sich wie oben

$$2\pi\, e^{-i o \tau} (w_3 - w_4)_{\text{Querw.}}$$

$$= \Gamma_3 \int_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u) \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{[i \mu b (u - t^*)]^{\nu}}{\nu!} \, d u \left(-i\pi e^{-i\mu b x} + \frac{i}{\mu b x} + \frac{1}{(\mu b x)^2} + 0\left(\frac{1}{x^3}\right)\right)$$

$$- \Gamma_3 \int_{u=0}^{2\Omega} \gamma(u) \left[\frac{1}{i \mu b x} \left(\frac{1}{1 - \frac{u - t^*}{x}} - e^{i\mu b (u - t^*)} \right) + \frac{1}{(i \mu b x)^2} \left(\frac{1}{\left(1 - \frac{u - t^*}{x}\right)^2} - e^{i\mu b (u - t^*)} \right) \right] d u$$

$$= 0\left(\int_{0}^{2\Omega} \gamma(u)\,(u - t^*)^2 \, d u \left[c_1 + \frac{c_2}{x^3}\right] \right).$$

Nun ist aber hinter dem Flügel

$$w_4 = 0\left(\int_{0}^{2\Omega} \gamma(u)\, d u \left[C_1 + \frac{C_2}{x^2}\right] \right),$$

womit wir also in hinreichender Entfernung hinter dem Flügel die Abschätzung

$$w_3 = w_4\left(1 + 0\left[t^2\left(K_1 + \frac{K_2}{x^2}\right)\right]\right)$$

erhalten.

Im räumlichen Fall (bei dem noch die Geschwindigkeitsdifferenz der Randwirbel neu hinzukommt) kann man die Richtigkeit der entsprechenden Abschätzung wörtlich wie oben zeigen.

5. In der Einleitung haben wir gesehen, wie zu einem jeden Schnitt $y = y_0$ des räumlichen Falles durch passende Festlegung von Γ_3 ein entsprechender ebener Fall zugeordnet wurde.

Längs dieses Schnittes y_0 wollen wir nun zum Geschwindigkeitsfeld dieser ebenen gebundenen Wirbelfläche eine Zusatzgeschwindigkeit so bestimmen, daß innerhalb der Flügeltiefe sich in erster Näherung das Geschwindigkeitsfeld der räumlichen gebundenen Wirbelfläche ergeben soll.

Wir betrachten an Hand des Prandtlschen Gedankens für den stationären Fall versuchsweise die Geschwindigkeitsdifferenz

$$\mathrm{Diff}\,(w) = (w_1 - w_3) - (w_2 - w_4)$$

der in der Einleitung definierten vier Fälle der gebundenen Wirbelverteilung und zeigen, daß im Bereich der Flügeltiefe diese Differenz in der Grenze mit $\frac{t}{2b} \to 0$ verschwindet, d. h. daß in erster Näherung

$$w_1 = w_3 + \lim_{t \to 0} (w_2 - w_4)$$

gilt. Wir untersuchen wiederum der Reihe nach die Beiträge der Geschwindigkeiten, die von den gebundenen, Rand- und Querwirbeln herrühren. Nach der Bezeichnung des vorigen § ist also

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}\,(w)_{\mathrm{geb.\,W.}} = \int_{v=0}^{2\Omega} \gamma(v)\,(v - (t^* - x))\,e_1(v - (t^* - x), \eta)\,dv$$

$$- 2\sqrt{1-\eta^2}\int_{v=0}^{2\Omega} \frac{\gamma(v)}{v - (t^* - x)}\,dv - \frac{\Gamma_2}{b}\,x\,e_1(x,\eta) + 2\sqrt{1-\eta^2}\,\frac{\Gamma_2}{bx} \qquad x = t^* \ldots -(2\Omega - t^*),$$

falls wir $e_1(\zeta,\eta) = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}}{\sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}^{\,3}}\,du$ setzen. Es gilt nun, wie später gezeigt werden soll (§ 6), für kleine ζ und $|\eta| \neq 1$ die Entwicklung

$$e_1(\zeta,\eta) = \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\zeta^2} + \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\zeta^2}\left[c_1(\eta)\,\zeta^2 \ln|\zeta| + c_2(\eta)\,\zeta^2 + \ldots\right],$$

die, in das Integral eingesetzt, für die Differenz der gebundenen Anteile

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}\,(w)_{\mathrm{geb.\,W.}}$$

$$= 2\sqrt{1-\eta^2}\int_{v=0}^{2\Omega} \gamma(v)\left[c_1(v - (t^* - x))\ln|v - (t^* - x)| + c_2(v - (t^* - x)) + \ldots\right]dv$$

$$- \frac{\Gamma_2}{b}\,2\sqrt{1-\eta^2}\left[c_1 x \ln|x| + c_2 x + \ldots\right]$$

liefert. Nun kommen die Anteile der Randwirbel an die Reihe. Es ist

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}\,(w)_{\mathrm{Randw.}} = -i\mu b\,e^{i\mu b(x - t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega} \gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v = w - (t^* - x)}^{\infty} e^{-i\mu b v}\,v\,e_1(v,\eta)\,dv\,dw$$

$$+ i\mu b\,\Gamma_2\,e^{i\mu b x}\int_{v=x}^{\infty} e^{-i\mu b v}\,v\,e_1(v,\eta)\,dv + i\mu b\,e^{i\mu b(x - t^*)}\,2\sqrt{1-\eta^2}\int_{v=-(t^*-x)}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv\int_{u=0}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,du$$

$$- i\mu b\,2\sqrt{1-\eta^2}\int_{v=0}^{2\Omega} \frac{e^{-i\mu b v}}{v - (t^* - x)}\int_{u=v}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,du\,dv - i\mu\,\Gamma_2\,2\sqrt{1-\eta^2}\,e^{i\mu b x}\int_{v=x}^{\infty}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv.$$

Wir betrachten vorerst nur die ersten beiden Glieder, die wir in der Form

$$-i\mu b\,e^{i\mu b x}\left[e^{-i\mu b t^*}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\left(\int_{v=x}^{\infty}\ldots - \int_{v=x}^{w-(t^*-x)}\ldots\right) - \frac{\Gamma_2}{b}\int_{v=x}^{\infty}\ldots\right]$$

schreiben können. Entwickeln wir $e^{i\mu b w}$ nach Potenzen von $i\mu b w$, so ergibt sich bis auf Glieder zweiter Ordnung in w

$$-i\mu b\, e^{i\mu b x}\Big[e^{-i\mu b t^*}\Big(\int_0^{2\Omega}\gamma(w)\,dw\cdot\int_{v=x}^{\infty}\ldots+i\mu b\int_0^{2\Omega}\gamma(w)\,w\,dw\cdot\int_{v=x}^{\infty}\ldots+\ldots\Big)$$
$$-e^{-i\mu b t^*}\int_{w=0}^{2\Omega}\ldots\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}\ldots-\frac{\Gamma_2}{b}\int_{v=x}^{\infty}\ldots\Big]$$

oder, falls wir $\Gamma_2=b\int_0^{2\Omega}\gamma(w)\,dw$ setzen, bis auf Glieder zweiter Ordnung in t

$$i\mu b\, e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}\,v\,e_1(v,\eta)\,dv\,dw$$
$$=i\mu b\, e^{i\mu b(x-t^*)}\,2\sqrt{1-\eta^2}\Big[\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{-(t^*-x)}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv\,dw+\int_{w=0}^{2\Omega}\ldots\int_{v=-(t^*-x)}^{w-(t^*-x)}\ldots$$
$$+\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}(c_1 v\ln|v|+c_2 v+\ldots)\,dv\,dw\Big].$$

Nun nehmen wir das dritte und das letzte Glied der Differenz und zerlegen

$$i\mu b\, e^{i\mu b(x-t^*)}\,2\sqrt{1-\eta^2}\Big[\Big(\int_{v=-(t^*-x)}^{x}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv+\int_{v=x}^{\infty}\cdots\Big)\int_{u=0}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,du-\frac{\Gamma_2}{b}\,e^{i\mu b t^*}\int_{v=x}^{\infty}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv\Big].$$

Das zweite und dritte Glied dieses Ausdruckes hebt sich nach Entwicklung von $e^{i\mu b u}$ resp. $e^{i\mu b t^*}$ bis auf Glieder zweiter Ordnung in t weg, ebenso das erste Glied mit dem ersten Glied des vorigen Ausdruckes, so daß nun die ganze Differenz bis auf Glieder zweiter Ordnung in t in der Form

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)_{\mathrm{Randw.}}=i\mu b\, e^{i\mu b(x-t^*)}\,2\sqrt{1-\eta^2}\Big[\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=-(t^*-x)}^{w-(t^*-x)}\frac{e^{-i\mu b v}}{v}\,dv\,dw$$
$$+\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}(c_1 v\ln|v|+c_2 v+\cdots)\,dv\,dw$$
$$-e^{-i\mu b(x-t^*)}\int_{v=0}^{2\Omega}\frac{e^{-i\mu b v}}{v-(t^*-x)}\int_{u=v}^{2\Omega}\gamma(u)\,e^{i\mu b u}\,du\,dv\Big]$$

dargestellt werden kann. Führen wir in das innere Integral des ersten Ausdruckes $v=u-(t^*-x)$ ein und vertauschen die Reihenfolge der Integrationen, so erhalten wir

$$e^{i\mu b(t^*-x)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{u=0}^{w}\frac{e^{-i\mu b u}}{u-(t^*-x)}\,du\,dw=e^{-i\mu b(x-t^*)}\int_{u=0}^{2\Omega}\frac{e^{-i\mu b u}}{u-(t^*-x)}\int_{w=u}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\,dw\,du,$$

das sich aber gerade mit dem letzten Glied weghebt. Bis auf Glieder zweiter Ordnung in t haben wir also schließlich

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)_{\mathrm{Randw.}}=i\mu b\, e^{i\mu b(x-t^*)}\,2\sqrt{1-\eta^2}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}(c_1 v\ln|v|+c_2 v)\,dv\,dw.$$

Nun betrachten wir die von den Querwirbeln induzierte Geschwindigkeitsdifferenz

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)_{\mathrm{Querw.}}=e^{i\mu b(x-t^*)}\Big[\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=w-(t^*-x)}^{\infty}e^{-i\mu b v}\,e_2(v,\eta)\,dv\,dw$$
$$-\frac{\Gamma_2}{b}\,e^{i\mu b t^*}\int_{v=x}^{\infty}e^{-i\mu b v}\,e_2(v,\eta)\,dv\Big],$$

mit (§ 6)

$$e_2(\zeta,\eta)=\int_{-1}^{+1}\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\frac{(\eta-u)\,du}{\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}^{\,3}}=\frac{1}{\zeta}\frac{\partial(\zeta^2 e_1)}{\partial\zeta}=2\sqrt{1-\eta^2}\,[2\,c_1\ln|\zeta|+c_1+2\,c_2+\ldots].$$

Wir trennen wiederum das innere Integral in $(\int_{v=w-(t^*-x)}^{x}\ldots+\int_{v=x}^{\infty}\ldots)$ und entwickeln den Faktor $e^{i\mu b w}$ des zweiten Ausdruckes nach dem Exponenten, ebenso den Faktor $e^{i\mu b t^*}$, so ergibt sich bis auf Glieder zweiter Ordnung in t

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)_{\mathrm{Querw.}}=-e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}\,e_2(v,\eta)\,dv\,dw.$$

Nun setzen wir die Entwicklung für e_2 ein und spalten vom inneren Integral den Anteil mit $c_1(1+\ln|v|)+c_2$ ab. Integrieren wir diesen Teil partiell nach v, so ergibt sich

$$-e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}\,e_2(v,\eta)\,dv\,dw$$

$$=e^{-i\mu b t^*}(c_1\,x\ln|x|+c_2\,x)\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\,dw$$

$$-\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,[c_1(w-(t^*-x))\ln|w-(t^*-x)|+c_2(w-(t^*-x))]\,dw$$

$$-i\mu b\,e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{i\mu b v}(c_1 v\ln|v|+c_2 v)\,dv\,dw.$$

Damit erhalten wir also für die gesamte Differenz bis auf Glieder $w^2\ln|w|$

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)$$

$$=-2\sqrt{1-\eta^2}\,e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{i\mu b v}(c_1\ln|v|+c_2)\,dv\,dw.$$

Nun ist nach Definition von t^* bis auf Glieder zweiter Ordnung in w

$$e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}c_2\,dv\,dw$$

$$=-\frac{c_2}{i\mu b}\left[\int_0^{2\Omega}\gamma(w)\,dw-e^{-i\mu b t^*}\int_0^{2\Omega}\gamma(w)\,(1+i\mu b w)\,dw\right]=-c_2\,\Gamma_2\,i\mu\,t^{*2},$$

also bis auf Glieder zweiter Ordnung in t^*

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)=-2\sqrt{1-\eta^2}\,c_1\,e^{i\mu b(x-t^*)}\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,e^{i\mu b w}\int_{v=x}^{w-(t^*-x)}e^{-i\mu b v}\ln|v|\,dv\,dw$$

oder bis auf Glieder von der Größenordnung $(2\,\Omega)^2\ln(2\,\Omega)$

$$4\pi e^{-i\sigma\tau}\,\mathrm{Diff}(w)=-2\sqrt{1-\eta^2}\,c_1\int_{w=0}^{2\Omega}\gamma(w)\,\{(w-(t^*-x))\ln|w-(t^*-x)|-x\ln x\}\,dw.$$

Bis auf Glieder von der Größenordnung $(2\,\Omega)\ln(2\,\Omega)$ gilt also für kleine $2\,\Omega$ die Näherungsgleichung $\mathrm{Diff}(w)\approx 0$ oder in der Grenze exakt

$$\lim_{2\Omega\to 0}[(w_1-w_3)-(w_2-w_4)]=0,$$

womit also in erster Näherung die Abwindgeschwindigkeit des räumlichen Flügels durch die des ebenen Flügels und der vergleichsweise herangezogenen Fadenfälle ausgedrückt ist.

Im folgenden beschränken wir uns also lediglich auf die Betrachtung der Korrekturdifferenz

$$D(x,\eta,\tau) = (w_2 - w_s)$$
$$= \frac{1}{4\pi} e^{i\sigma\tau} \frac{\Gamma_2}{b} [\Delta_1(x,\eta) - i\mu b\, e^{i\mu b x} \Delta_2(x,\eta) + e^{i\mu b x} \Delta_3(x,\eta)]$$

mit

$$\Delta_1 = x\, e_1(x,\eta) - \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{x}$$

$$\Delta_2 = \int\limits_{u=-1}^{+1} \sqrt{1-u^2} \int\limits_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}\, v\, dv}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^3}\, du - 2\sqrt{1-\eta^2} \int\limits_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v}\, dv$$

$$\Delta_3 = \int\limits_{u=-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \int\limits_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}(\eta-u)\, dv}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}^3}\, du,$$

wobei nach dem Obigen für die zahlenmäßige Auswertung allein die Bestimmung von $\lim\limits_{x\to 0} D(x,\eta,\tau) = D(0,\eta,\tau)$ von Interesse ist. Bevor wir aber dazu übergehen, wollen wir noch eine Umformung vornehmen. Wir erhalten durch partielle Integration des inneren Integrals von Δ_2

$$\int\limits_{v=x}^{\infty} e^{-i\mu b v}\, d\left(-\frac{1}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}}\right) = \frac{e^{-i\mu b x}}{\sqrt{x^2+(\eta-u)^2}} - i\mu b \int\limits_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{\sqrt{v^2+(\eta-u)^2}}\, dv.$$

Nennen wir das Restintegral $\Phi(x,\eta-u)$, so ist leicht ersichtlich, daß das innere Integral des Ausdruckes Δ_3 durch $-\frac{\partial\Phi}{\partial(\eta-u)}$ dargestellt wird. Setzen wir also das elliptische Integral $e_3(x,\eta) = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}\, du}{\sqrt{x^2+(\eta-u)^2}}$, so erhalten wir schließlich

$$\Delta_1 = x\, e_1(x,\eta) - \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{x},$$

$$\Delta_2 = e^{-i\mu b x} e_3(x,\eta) - i\mu b \int\limits_{u=-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, \Phi(x,\eta-u)\, du - 2\sqrt{1-\eta^2} \int\limits_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i\mu b v}}{v}\, dv,$$

$$\Delta_3 = -\int\limits_{u=-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial\Phi}{\partial(\eta-u)}\, du,$$

zu deren Auswertung mit $x\to 0$ wir nun übergehen wollen.

6. Berechnung der elliptischen Integrale. Bei der Berechnung des Grenzwertes der Differenz D müssen wir als erstes die darin auftretenden elliptischen Integrale bestimmen. Wir transformieren die Integranden durch eine lineare Substitution auf symmetrisch um den Nullpunkt liegende Verzweigungspunkte, wobei wir die Punkte (1,0) und (— 1,0) festhalten wollen. Das liefert den Ansatz

$$\frac{1-u}{1+u} = \lambda \frac{1-x}{1+x}, \quad \text{d. h.} \quad u = \frac{x(1+\lambda)+(1-\lambda)}{x(1-\lambda)+(1+\lambda)} = \frac{Z}{N}.$$

Damit wird also

$$du = \frac{4\lambda}{N^2}\, dx, \qquad 1-u^2 = \frac{4\lambda}{N^2}(1-x^2), \qquad \zeta^2+(\eta-u)^2 = \frac{p\,x^2+A\,x+q}{N^2}.$$

Setzen wir nun $A(\lambda) = 0$, so gilt $\lambda^2 = \frac{\zeta^2+(\eta-1)^2}{\zeta^2+(\eta+1)^2} = \left(\frac{r}{R}\right)^2$ mit

$$p = 2r\left(r - \frac{\zeta^2+\eta^2-1}{R}\right), \qquad q = 2r\left(r + \frac{\zeta^2+\eta^2-1}{R}\right).$$

Besonders einfach werden die Ausdrücke, wenn wir statt der Koordinaten (ζ, η) die Parameter (ϑ, λ) der Kreisbüschel $R^2 + r^2 - 2\,R\,r\cos\vartheta - (2\,c)^2 = 0$, $\vartheta = \text{const}$; $\frac{r}{R} = \lambda = \text{konst.}$; $M_\vartheta\left(0, \frac{1}{\operatorname{tg}\vartheta}\right)$, $\varrho_\vartheta = \frac{1}{\sin\vartheta}$; $M_\lambda\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, 0\right)$, $\varrho_\lambda = \frac{2\,\lambda}{1-\lambda^2}$ (in unserem Fall $c = 1$) einführen (Abb. 6).

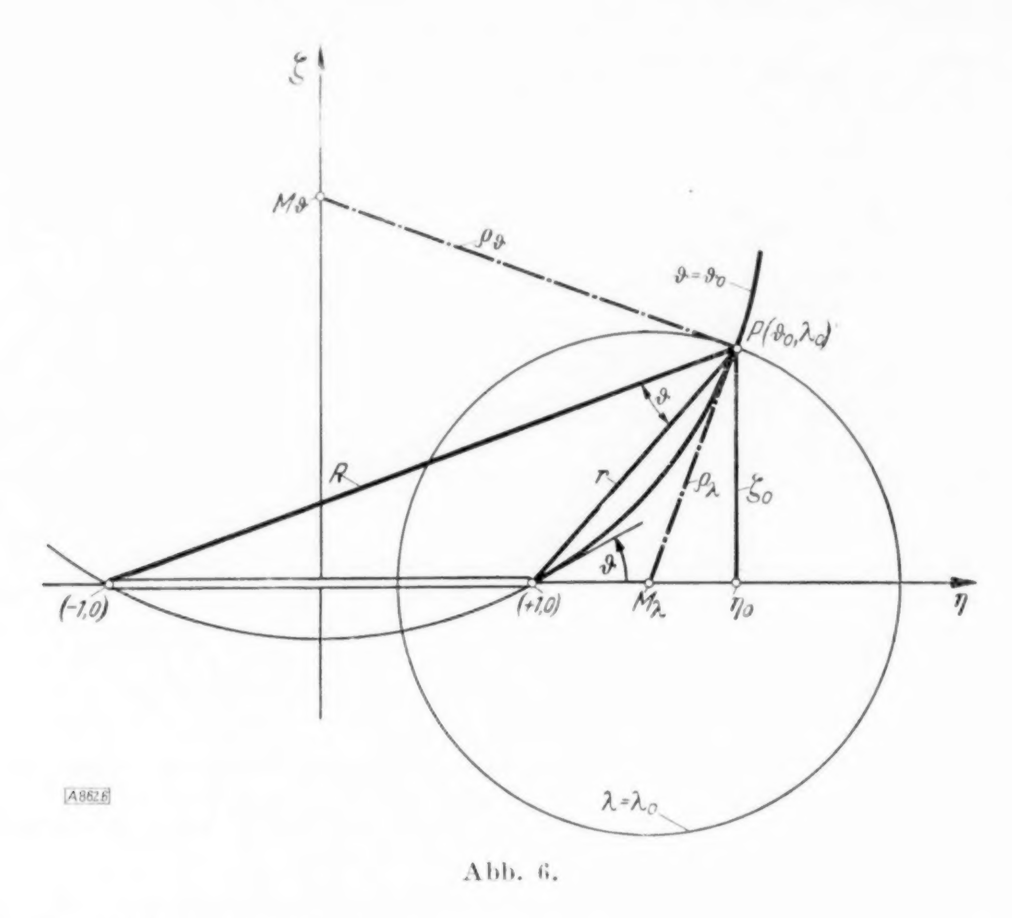


Abb. 6.

Wie man leicht einsieht, wird dann

$$p = 2\,r^2\,(1 - \cos\vartheta)\,, \qquad q = 2\,r^2\,(1 + \cos\vartheta)\,, \qquad R\,r = \frac{4\,\lambda}{1 - 2\,\lambda\cos\vartheta + \lambda^2}\,.$$

Aus dem Dreieck $(-1, P, +1)$ folgt mit dem obigen $\zeta = \frac{2\,\lambda\sin\vartheta}{1 - 2\,\lambda\cos\vartheta + \lambda^2}$ und es ist $\eta = \frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2} - \varrho_\lambda = \frac{1-\lambda}{1+\lambda}$ zu setzen. Damit erhalten wir nun $e_1(\zeta, \eta) = 2\sqrt{\left(\frac{4\,\lambda}{q}\right)^3}\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+\gamma^2\,x^2}^3}\,d\,x$ mit $\gamma^2 = \frac{p}{q} = \operatorname{tg}(\vartheta/2)$, $\frac{4\,\lambda}{q} = \frac{\sin\vartheta}{\zeta\,(1+\cos\vartheta)}$. Im Einheitskreis ist $\gamma > 1$, wir führen also $u^2 = 1 - x^2$ als neue Veränderliche ein und erhalten die Normalform

$$e_1(\zeta, \eta) = 2\sqrt{\left(\frac{4\,\lambda}{q}\right)^3}\,\frac{1}{\sqrt{1+\gamma^2}^3}\int\limits_0^1 \frac{u^2\,d\,u}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{1-k^2\,u^2}^3} \quad \text{mit } k = \frac{\gamma}{\sqrt{1+\gamma^2}} = \sin(\vartheta/2)\,.$$

Somit haben wir schließlich $e_1(\zeta, \eta) = \frac{2}{|\zeta|\sqrt{\zeta}\sqrt{k\,k'}}\,[\mathrm{E}(k) - k'^2\,\mathrm{K}(k)]$, wobei, wie üblich, $\mathrm{E}(k) = E(k, \pi/2)$, $\mathrm{K}(k) = F(k, \pi/2)$ und $k' = \cos(\vartheta/2)$ gesetzt ist.

Beim Integral $e_3(\zeta, \eta)$ können wir auf Grund der Identität $\sqrt{1-u^2} = \frac{1-u^2}{\sqrt{1-u^2}}$ schreiben

$$e_3 = \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\,u}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}} + \int\limits_{-1}^{+1} \frac{u\,(\eta-u)\,d\,u}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}} - \eta\int\limits_{-1}^{+1} \frac{u\,d\,u}{\sqrt{1-u^2}\,\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}}\,.$$

Andererseits ist aber auch

$$e_2 = \zeta^2\int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}\,d\,u}{\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}^3} + \int\limits_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-u^2}\,(\eta-u)^2\,d\,u}{\sqrt{\zeta^2+(\eta-u)^2}^3}\,.$$

Fassen wir $\frac{\eta - u}{\sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}^3} = \frac{d}{d u}\left(\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}}\right)$ zusammen und integrieren das zweite Integral partiell, so erhalten wir

$$e_3 = \zeta^2 e_1 + e_3 + \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{(\eta - u)\, d u}{\sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}}.$$

Es ergibt sich also einerseits die Bestimmungsgleichung für e_2: $\frac{\partial (\zeta^2 e_1 (\zeta, \eta))}{\partial \zeta} = \zeta e_2 (\zeta, \eta)$, andererseits aber, falls wir die obige Gleichung in die erste Umformung von e_3 einführen,

$$e_3 = -\zeta^2 e_1 + \int_{-1}^{+1} \frac{d u}{\sqrt{1 - u^2} \sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}} - \eta \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1 - u^2}} \frac{d u}{\sqrt{\zeta^2 + (\eta - u)^2}},$$

aus der sich leicht die Zurückführung von e_3 auf eine Normalform herleiten läßt.

Das erste dieser Integrale liefert, vermöge der anfangs eingeführten linearen Transformation $\sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \int_{-1}^{+1} \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \gamma^2 x^2}}$, das letzte

$$\eta \int_{-1}^{+1} \ldots = \eta \sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta + x}{1 + \eta x} \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \gamma^2 x^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \int_{-1}^{+1} \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \gamma^2 x^2}} + (\eta^2 - 1) \sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \int_{-1}^{+1} \frac{d x}{(1 + \eta x) \sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \gamma^2 x^2}}.$$

Demnach wird also

$$e_3 = -\zeta^2 e_1 + (1 - \eta^2) \sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \int_{-1}^{+1} \frac{1 - \eta x}{1 - \eta^2 x^2} \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2} \sqrt{1 + \gamma^2 x^2}}.$$

Da das Integral über den ungeraden Integranden verschwindet, erhalten wir nach Substitution von $u^2 = 1 - x^2$

$$e_2 = -\zeta^2 e_1 + 2 \sqrt{\frac{4\lambda}{q}} \frac{1}{\sqrt{1 + \gamma^2}} \int_0^1 \frac{d u}{(1 + \mu^2 u^2) \sqrt{1 - u^2} \sqrt{1 - k^2 u^2}}$$

mit

$$\mu^2 = \frac{\eta^2}{1 - \eta^2}, \qquad k = \sin (\vartheta/2).$$

Führen wir nun $u = \sin t$ ein, erweitern mit $\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}$ und setzen für den Integranden die Partialbruchzerlegung $\frac{A}{1 - k^2 \sin^2 t} + \frac{B}{1 + \mu^2 \sin^2 t}$ an[8]), so ergibt sich

$$\int_0^{\pi/2} \frac{d t}{(1 + \mu^2 \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}} = \frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \mathrm{K}(k) + \frac{\mu^2}{\mu^2 + k^2} \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}{1 + \mu^2 \sin^2 t} d t.$$

Das letzte Integral ist eine der gebräuchlichsten Normalformen des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung[9]). Demnach haben wir also

$$e_3 = -\zeta^2 e_1 + 2 \sqrt{\frac{k k'}{\zeta}} \left[\frac{k^2}{k^2 + \mu^2} \mathrm{K}(k) + \frac{\mu^2}{\mu^2 + k^2} \frac{k'^2}{\mu'^2} \mathrm{K}(k) \right.$$
$$\left. + \frac{\mu^2}{\mu^2 + k^2} \frac{\sqrt{\mu'^2 - k'^2}}{\mu \mu'} \left\{\frac{\pi}{2} - (\mathrm{K}(k) E(k', \beta) + \mathrm{E}(k) F(k', \beta) - \mathrm{K}(k) F(k', \beta))\right\}\right].$$

[8]) Hamel: Berechnung des vollständigen elliptischen Integrals dritter Gattung. Sitzungsbericht der Berl. math. Ges. 31 (1932).

[9]) Nyström: Praktische Auswertung von elliptischen Integralen dritter Gattung. Societas Scientiarum Fennica C. P. M. VII. 12 (1935).

mit

$$\mu = \operatorname{cotg}\beta = \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad \mu' = \frac{1}{\sin\beta} = \frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}, \qquad \eta = \cos\beta, \qquad (0<\eta<1),$$

wofür wir auch zusammenfassend schreiben können

$$e_3 = -\zeta^2 e_1 + 2\sqrt{\frac{k\,k'}{\zeta}}\left[(1-\eta^2)\,\mathrm{K}(k) + \frac{\pi}{2}\frac{\eta\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{k^2+\eta^2 k'^2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\eta\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{k^2+\eta^2 k'^2}}\{\mathrm{K}(k)\,E(k',\beta) + \mathrm{E}(k)\,F(k'\beta) - \mathrm{K}(k)\,F(k',\beta)\}\right].$$

Im Hinblick auf den nachfolgenden Grenzübergang mit $\zeta\to 0$ wollen wir für die Integrale e_1 und e_3 schon an dieser Stelle die Entwicklung für kleine Werte von ζ vornehmen. Zu diesem Zweck betrachten wir erst den Zusammenhang zwischen k, k', ζ, η. Aus

$$\cos\vartheta = \frac{R^2+r^2-4}{2\,R\,r} \quad \text{und} \quad R^2 = \zeta^2 + (1+\eta)^2, \qquad r^2 = \zeta^2 + (1-\eta)^2 \quad \text{folgt}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\zeta^2+\eta^2-1}{(1-\eta^2)\sqrt{1+\left(\frac{\zeta}{1+\eta}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\zeta}{1-\eta}\right)^2}}$$

also im Quadrat $|\zeta| + |\eta| < 1$

$$\cos\vartheta = \frac{\zeta^2+\eta^2-1}{(1-\eta^2)\left(1+\frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2}\zeta^2 + \frac{2\,\eta^2}{(1-\eta^2)^4}\zeta^4 + O(\zeta^6)\right)}.$$

Dementsprechend ist

$$\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\Big\}\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{(1-\eta^2) + \frac{1+\eta^2}{1-\eta^2}\zeta^2 + \frac{2\,\eta^2}{(1-\eta^2)^3}\zeta^4 + O(\zeta^6) \pm \zeta^2 \pm (\eta^2-1)}{2\,(1-\eta^2)\left(1+\frac{1+\eta^2}{(1-\eta^2)^2}\zeta^2 + \frac{2\,\eta^2}{(1-\eta^2)^4}\zeta^4 + O(\zeta^6)\right)}}$$

oder

$$k' = \cos\frac{\vartheta}{2} = \frac{|\zeta|}{1-\eta^2}(1-O_1(\zeta^2)), \qquad k = \sin\frac{\vartheta}{2} = \pm(1-O_2(\zeta^2)) \quad \text{für} \quad \zeta \gtrless 0.$$

Für e_1 erhalten wir demnach

$$e_1 = \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\zeta^2\sqrt{1-O(\zeta^2)}}\left[\mathrm{E}(k) - k'^2\,\mathrm{K}(k)\right].$$

Mit $\zeta\to 0$ geht $k'\to 0$, $k\to 1$, und es gelten die Entwicklungen[6])

$$\mathrm{E}(k) = 1 + 1/2\,(\Lambda - 1/2)\,k'^2 + ((k'^2\,\Lambda)), \qquad \mathrm{K}(k) = \Lambda + ((k'^2\,\Lambda)),$$

wobei $\Lambda = \ln\left(\frac{4}{k'}\right)$ gesetzt ist.

Es wird also sein

$$e_1 = \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\zeta^2} + C\,\Lambda + ((k'^2\,\Lambda)), \quad \text{d. h.} \quad \lim_{\zeta\to 0}\zeta\left(e_1(\zeta,\eta) - \frac{2\sqrt{1-\eta^2}}{\zeta^2}\right) = \lim_{\zeta\to 0}((\zeta\,\Lambda)) = 0.$$

Beim Grenzübergang im Integral e_3 betrachten wir erst den Ausdruck in der geschweiften Klammer. Es ist

$$\lim_{\zeta\to 0}\{\cdots\} = E(1,\pi/2)\,F(0,\beta) + \lim_{\zeta\to 0}F(k,\pi/2)\,k'^2\,\mathrm{D}(k',\beta),$$

da $\mathrm{D}(0,\beta)$ beschränkt ist[6]), wird

$$\lim_{\zeta\to 0}\{\cdots\} = \arccos\eta - \lim_{\zeta\to 0}((\zeta^2\,\Lambda)) = \arccos\eta.$$

Es ist also

$$\lim_{\zeta\to 0}\left[e_3(\zeta,\eta) + 2\sqrt{1-\eta^2}\ln\zeta\right] = -2\sqrt{1-\eta^2}\,(1-\ln 4\,(1-\eta^2)) + 2\,\eta\arcsin\eta.$$

Demnach ergibt sich also $\lim_{x \to 0} \Delta_1(x, \eta) = 0$ und wie aus der Entwicklung des Integralsinus resp. Cosinus ohne weiteres folgt

$$\lim_{x \to 0} \left[e^{-i \mu b x} e_3(x, \eta) - 2\sqrt{1-\eta^2} \int_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i \mu b v}}{v} \, d v \right]$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(e_3(x, \eta) + 2\sqrt{1-\eta^2} \ln |x| + 2\sqrt{1-\eta^2} [\ln \mu b \gamma + i \pi/2 + ((x))] \right)$$

$$= 2\sqrt{1-\eta^2}\,(-1 + \ln 4\,(1-\eta^2)\,\mu b \gamma) + 2\eta \arcsin \eta + i \pi \sqrt{1-\eta^2}\,,$$

wobei $\ln \gamma$ die Eulersche Konstante bedeutet. Somit haben wir also

$$D(0, \eta; \tau) = \frac{1}{4\pi} e^{i \sigma \tau} \frac{\Gamma_2}{b} [-i \mu b \Delta_2(0, \eta) + \Delta_3(0, \eta)]$$

mit

$$\Delta_2(0, \eta) = 2\sqrt{1-\eta^2}\,(-1 + \ln 4\,(1-\eta^2)\,\mu b \gamma) + 2\eta \arcsin \eta$$

$$+ i \pi \sqrt{1-\eta^2} - i \mu b \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, \Phi(0, \eta - u)\, d u$$

$$\Delta_3(0, \eta) = -\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{\partial \Phi(0, \eta - u)}{\partial(\eta - u)} \, d u\,.$$

7. Die Ermittlung des Integrals Φ. Führen wir in das Integral $\Phi = \int_{v=x}^{\infty} \frac{e^{-i \mu b v}}{\sqrt{v^2 + (\eta - u)^2}} d v$ die neue Veränderliche $w = \mu b v$ ein und setzen $\mu b(\eta - u) = a$, so erhalten wir

$$\Phi_{x=0} = \Phi_c(a) - i \Phi_s(a) = \int_{w=0}^{\infty} \frac{e^{-i w}}{\sqrt{a^2 + w^2}} d w\,.$$

Nun gilt aber bekanntlich für die Hankelsche Funktion nullter Ordnung erster Art die Integraldarstellung

$$\Phi_c(a) = \int_0^{\infty} \frac{\cos w \, d w}{\sqrt{a^2 + w^2}} = i \frac{\pi}{2} H_0^1(i|a|)\,,$$

womit also zur Bestimmung von Φ nur die zahlenmäßige Darstellung des Imaginärteiles untersucht werden muß.

Bilden wir die erste und zweite Ableitung von Φ nach dem Parameter a und führen den aus der ersten Ableitung gewonnenen Ausdruck

$$-\frac{1}{a} \frac{d \Phi}{d a} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i w}}{\sqrt{a^2 + w^2}^3} d w$$

durch partielle Integration nach w in die Form

$$-\frac{1}{a} \frac{d \Phi}{d a} = i \int_0^{\infty} \frac{e^{-i w} \cdot w \, d w}{\sqrt{a^2 + w^2}^3} + 3 \int_0^{\infty} e^{-i w} \frac{w^2}{\sqrt{a^2 + w^2}^5} d w$$

über, so ist leicht ersichtlich, daß die Gleichung

$$\frac{d^2 \Phi}{d a^2} + \frac{1}{a} \frac{d \Phi}{d a} = i \int_0^{\infty} e^{-i w} d\left(-\frac{1}{\sqrt{a^2 + w^2}}\right)$$

gilt. Nach partieller Integration des rechtsstehenden Integrals erhalten wir für Φ die Bestimmungsgleichung

$$\Phi'' + \frac{1}{a} \Phi' - \Phi = \frac{i}{a}\,, \quad \text{also für den Imaginärteil} \quad \Phi_s'' + \frac{1}{a} \Phi_s' - \Phi_s = -\frac{1}{a}$$

mit der Nebenbedingung $\Phi_s(a=0)=\frac{\pi}{2}$. Da die homogene Dgl. durch Besselfunktionen nullter Ordnung mit rein imaginärem Argument befriedigt wird, setzen wir die Lösung in der Form

$$\Phi_s = c_1(a)\,J_0(i\,a) + c_2(a)\,i\,H_0^1(i\,a)$$

an. Nach der Methode der „Variation der Konstanten" muß dann sein

$$c_1'\,J_0(i\,a) + c_2'\,i\,H_0^1(i\,a) = 0\,, \qquad -i\,c_1'\,J_1(i\,a) + c_2'\,H_1^1(i\,a) = -\frac{1}{a}\,.$$

Mit Zuhilfenahme der Funktionalgleichung[6] $J_{\nu-1}(a)\,H_\nu^1(a) - J_\nu\,H_{\nu-1} = \frac{2}{i\,\pi\,a}$ ergibt sich also

$$c_1' = -i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,a)\,, \qquad c_2' = \frac{\pi}{2}\,J_0(i\,a)\,,$$

d. h.

$$\Phi_s = \left(-\int\limits_{x=0}^{a} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,x)\,dx + K_1\right) J_0(i\,a) + \left(\int\limits_{x=0}^{a} J_0(i\,x)\,dx + K_2\right) i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,a)\,.$$

Da mit $a\to 0$ das erste Integral wie $a^2\ln a$, das zweite wie a^2 gegen Null geht, $J_0(i\,a)\to 1$, $H_0^1(i\,a)$ dagegen logarithmisch unendlich wird, muß $K_1=\frac{\pi}{2}$, $K_2=0$ sein.

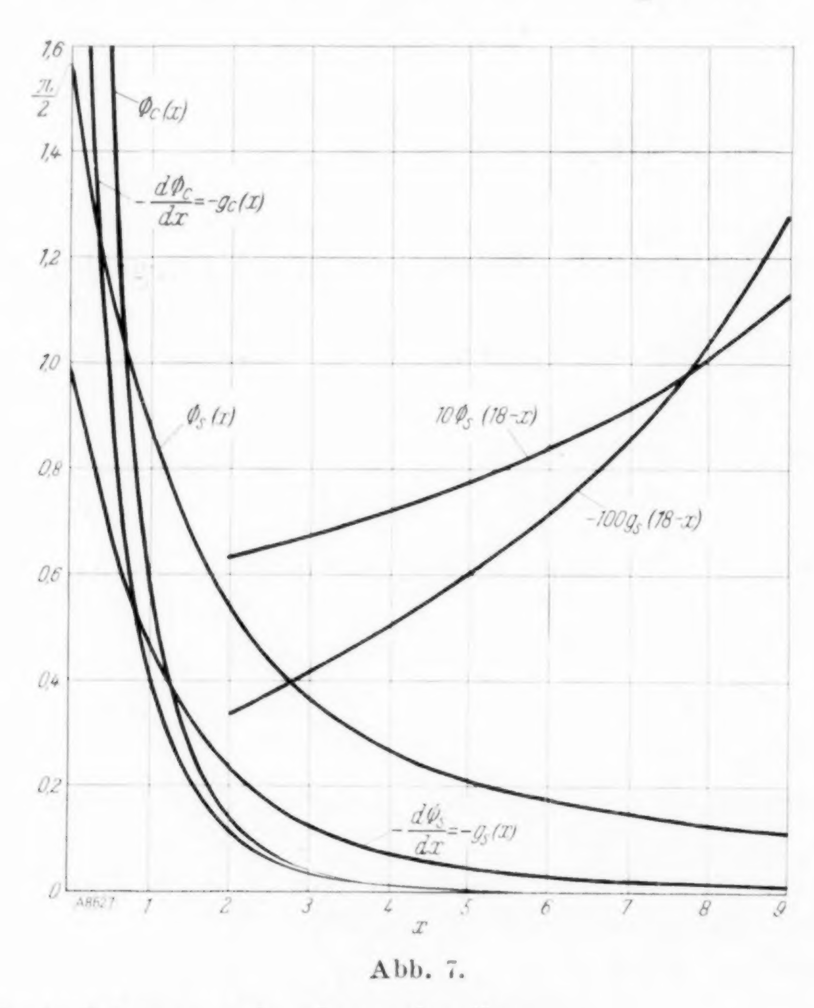


Abb. 7.

Mit diesem Ergebnis können wir also schreiben

$$\Phi_c = i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|)$$

$$\Phi_s = \left(-\int\limits_0^{|a|} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,x)\,dx\right) J_0(i\,\mu\,b\,|\eta-u|) + \left(\int\limits_{x=0}^{|a|} J_0(i\,x)\,dx\right) i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|)$$
$$+\frac{\pi}{2}\,J_0(i\,\mu\,b\,|\eta-u|),$$

mithin

$$\frac{\partial\Phi_c}{\partial(\eta-u)} = \pm\,\mu\,b\,\frac{\pi}{2}\,H_1^1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|) = \mu\,b\,[\pm\,g_c(\mu\,b\,|\eta-u|)]$$

$$\frac{\partial\Phi_s}{\partial(\eta-u)} = \pm\,\mu\,b\left[\left(-\int\limits_0^{|a|} i\,\frac{\pi}{2}\,H_0^1(i\,x)\,dx\right) i\,J_1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|) + \left(\int\limits_{x=0}^{|a|} J_0(i\,x)\,dx\right)\frac{\pi}{2}\,H_1^1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|)\right.$$
$$\left. - i\,\frac{\pi}{2}\,J_1(i\,\mu\,b\,|\eta-u|)\right] = \mu\,b\,[\pm\,g_s(\mu\,b\,|\eta-u|)],$$

wobei a für $\mu b(\eta - u)$ steht und das obere resp. untere Vorzeichen zu wählen ist, je nachdem $(\eta - u) \gtrless 0$ gilt (Abb. 7)[10]. Auf Grund dieses Ergebnisses können wir nun eine für die nachfolgende Auswertung der Restintegrale sehr vorteilhafte Umformung vornehmen. Wir setzen nämlich

$$f(\eta) = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-u^2}\, \Phi(\mu b\,|\eta - u|)\, du = \int_{-1}^{\eta} + \int_{\eta}^{+1} = \int_{x=0}^{1+\eta} \sqrt{1-(\eta - x)^2}\, \Phi(\mu b x)\, dx$$

$$+ \int_{x=0}^{1-\eta} \sqrt{1-(\eta + x)^2}\, \Phi(\mu b x)\, dx \qquad (|\eta| < 1).$$

Es ist also

$$\frac{df}{d\eta} = -\int_{0}^{1+\eta} \frac{(\eta - x)}{\sqrt{1-(\eta - x)^2}}\, \Phi(\mu b x)\, dx - \int_{0}^{1-\eta} \frac{(\eta + x)}{\sqrt{1-(\eta + x)^2}}\, \Phi(\mu b x)\, dx .$$

Nun können wir aber auch schreiben

$$\frac{df}{d\eta} = -\int_{x=0}^{1+\eta} \Phi(\mu b x)\, d\sqrt{1-(\eta - x)^2} + \int_{x=0}^{1-\eta} \Phi(\mu b x)\, d\sqrt{1-(\eta + x)^2}$$

$$= \Big[-\sqrt{1-(\eta - x)^2}\, \Phi(\mu b x)\Big]_{x \to 0}^{1+\eta} + \Big[\sqrt{1-(\eta + x)^2}\, \Phi(\mu b x)\Big]_{x \to 0}^{1-\eta}$$

$$+ \int_{0}^{1+\eta} \sqrt{1-(\eta - x)^2}\, \frac{d\Phi}{dx}\, dx - \int_{0}^{1-\eta} \sqrt{1-(\eta + x)^2}\, \frac{d\Phi}{dx}\, dx .$$

An den oberen Grenzen liefern die ausintegrierten Teile den Wert Null. Zur Ermittlung des Grenzwertes an der Stelle $x = 0$ entwickeln wir die beiden Wurzelausdrücke nach x. Es ist

$$\sqrt{1-(\eta - x)^2} - \sqrt{1-(\eta + x)^2} = \frac{2\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\, x - O(x^3).$$

Da Φ bei $x = 0$ höchstens logarithmisch unendlich wird, ist der Grenzwert des Produktes, somit also der ausintegrierten Teile an der unteren Grenze ebenfalls Null. Wir haben also

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -\int_{x=0}^{1+\eta} \frac{\eta - x}{\sqrt{1-(\eta - x)^2}}\, \frac{d\Phi}{dx}\, dx + \int_{0}^{1-\eta} \frac{\eta + x}{\sqrt{1-(\eta + x)^2}}\, \frac{d\Phi}{dx}\, dx$$

$$= -\int_{u=-1}^{\eta} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, \frac{d\,\Phi(\mu b\,|\eta - u|)}{d(\eta - u)}\, du - \int_{u=\eta}^{1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, \frac{d\,\Phi(\mu b\,|\eta - u|)}{d(\eta - u)}\, du$$

$$= -F_\lambda(\eta) = -\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, \frac{d\,\Phi(\mu b\,|\eta - u|)}{d(\eta - u)}\, du$$

oder, falls wir $\lambda = \mu b$, $h(\eta, \lambda) = 2\sqrt{1-\eta^2}\,(-1 + \ln 4\,(1-\eta^2)\,\gamma\,\lambda) + 2\,\eta \arcsin \eta$ setzen in endgültiger Schreibweise

$$\left.\begin{aligned} D(\sigma, \eta; \tau) &= \frac{1}{4\pi}\, e^{i\sigma\tau}\, \frac{\Gamma_2}{b}\,(A + iB) \\ A &= \lambda\pi\sqrt{1-\eta^2} - \lambda^2 f_c(\eta, \lambda) + \frac{\partial^2 f_c(\eta, \lambda)}{\partial \eta^2} \\ B &= -\lambda h(\eta, \lambda) + \lambda^2 f_s(\eta, \lambda) - \frac{\partial^2 f_s(\eta, \lambda)}{\partial \eta^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

[10]) Die Zahlenwerte zur Abb. 7 wurden mir von Herrn R. Müller (FIB) freundlicherweise zur Verfügung gestellt.

8. Die numerische Auswertung der Phasenfaktoren. Bei der numerischen Auswertung ist es notwendig, erst den Variationsbereich der Parameter festzulegen. Statt der Parameter t, b, μ führen wir die reziproke Flügelstreckung $\Omega = \frac{t}{2b}$ und die Wellenlänge der Schwingung $L = T \cdot V = \frac{2\pi}{\sigma} V = \frac{2\pi}{\mu}$ ein. Auf Grund unserer Voraussetzungen für die Herleitung der Gleichung (A) setzen wir $\Omega = 0 \ldots {}^1/_4$ und $L = \infty \ldots S = 2b$. Dann wird $\lambda = \frac{\pi S}{L} = 0 \ldots \pi$. Also müssen wir die Größen A, B der Gl. (5) in den Bereich für $\lambda = 0 \ldots 3$, $\eta = 0{,}0 \ldots 1{,}0$ hinreichend genau bestimmen. Die Form der Darstellung von A und B läßt die graphische Auswertung vor allen anderen als sehr zweckmäßig erscheinen, vorausgesetzt, daß in dem interessierenden Bereich der Parameter eine hinreichende Genauigkeit erzielt werden kann.

Falls wir $F_\lambda(\eta)$ mit dem Integraphen durch Umzeichnung des Integranden für feste λ und η Werte ermitteln, kann der Mittelwert der Ablesungen im Durchschnitt mit ca. 0,15 % Teilstrichen falsch sein. Falls E_x, E_y die Einheiten des Integranden auf der x- und y-Achse in cm bedeutet, y der in Teilstrichen abgelesene Integralwert ist und nach der Eichung p Teilstriche $\div\, x\,\mathrm{cm}^2$ entsprechen, haben wir für die erste Integralkurve y Teilstriche $\div \frac{x\,y}{p\,E_x\,E_y}$ Einheiten. Der relative Ordinatenfehler der ersten Integration ist also $\leq \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + \left|\frac{\Delta p}{p}\right|$. Nach einmaliger instrumenteller Integration von $F_\lambda(\eta)$ haben wir den Fehler der durch Δp und Δy auch bei genauen Integrandenwerten bedingt ist ($\approx 0{,}3\,\%$), und dazu den Fehler, der durch die fehlerhaften Werte des Integranden herrührt ($\approx 0{,}3\,\%$). Das gleiche gilt auch bei der 2. Integration. Das Doppelintegral der F-Kurven ist also möglicherweise um ca. 0,9 % falsch. Da die Bestimmung von f noch eine Integration erfordert (Festlegung der Integrationskonstante), kann f um ca. 1,2 %, F um ca. 0,3 % falsch sein. Es ist also der Gesamtfehler ungefähr mit $1{,}2\,\lambda^2 + 0{,}3\,\%$ proportional. Bei kleinen Parameterwerten (bis $\lambda = 1$) ist also die zu erwartende Genauigkeit der graphischen Bestimmung befriedigend. Bei wachsendem λ steigt der Fehler quadratisch mit λ, da aber der wesentliche Bereich für λ zwischen $0 \ldots 2$ (im extremen Fall bis 3) liegt und in diesem Bereich nach dem Obigen ungefähr mit einem Fehler von ca. 5 % zu rechnen ist, wollen wir diesen Grad der Ungenauigkeit auf Grund der sonstigen wesentlichen Vorteile der graphischen Methode in Kauf nehmen. Daß bei Werten $\lambda > 3$ sehr starke Streuungen auftreten müssen, ist nach dem Obigen klar, trotzdem wollen wir bei der Bestimmung von A und B die Lösung nicht nur für die Werte $\lambda = 0{,}2$; 0,5; 1,0; 2,0; sondern auch für $\lambda = 4{,}0$; 6,0; 8,0; 10,0 ansetzen.

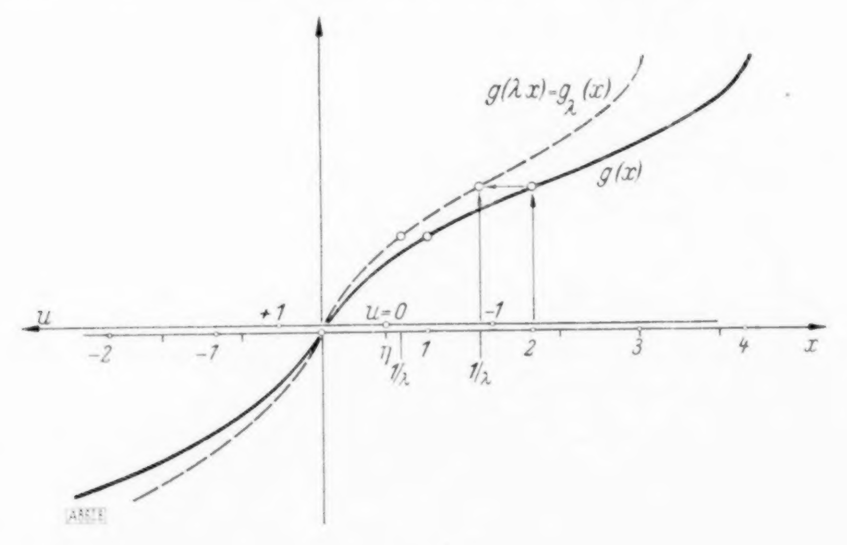


Abb. 8.

Als erstes betrachten wir $F_\lambda(\eta) = \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, g(\lambda\,|\eta - u|)\, du$, wobei nach dem vorigen $g = \begin{cases} g_s \\ g_c \end{cases}$ zahlenmäßig bekannt ist. Durch Umzeichnung der Kurve $g(x)$ auf die Einheit $\frac{1}{\lambda}$ erhalten wir $g(\lambda x) = g_\lambda(x)$ (Abb. 8) oder mit $x = \eta - u$ $\;g_\lambda(\eta - u)$. Nun führen wir $u = \cos t$ ein. Damit geht das Integral über in $\lambda \int_0^\pi g_\lambda(\eta - \cos t)\, d(\sin t)$, d. h. übertragen wir die Funktionswerte g_λ, die zur Abszisse $\eta - \cos t$ zugehören, auf die Abszisse $\xi = \sin t$, so ergibt sich $\lambda \oint_{(0,\,1,\,0)} \bar{g}_\lambda(\xi)\, d\xi$, wobei $\bar{g}_\lambda(\xi)$ die auf die Abszisse ξ umgezeichnete $g_\lambda(x)$ Kurve bedeutet.

Das mit dem Integraphen auszuwertende Umlaufintegral über $\bar{g}_\lambda(\xi)$ liefert den Wert von $F_\lambda(\eta)$ für ein festes λ und η. Liegt für ein festes λ die $g_\lambda(x)$ Kurve gezeichnet vor, so ist für verschiedene mit der Einteilung der Abszisse x übereinstimmende Werte von η die Umzeichnung der $g_\lambda(x)$ Kurve für alle diese η Werte nach Abb. 9 ohne weiteres durchführbar.

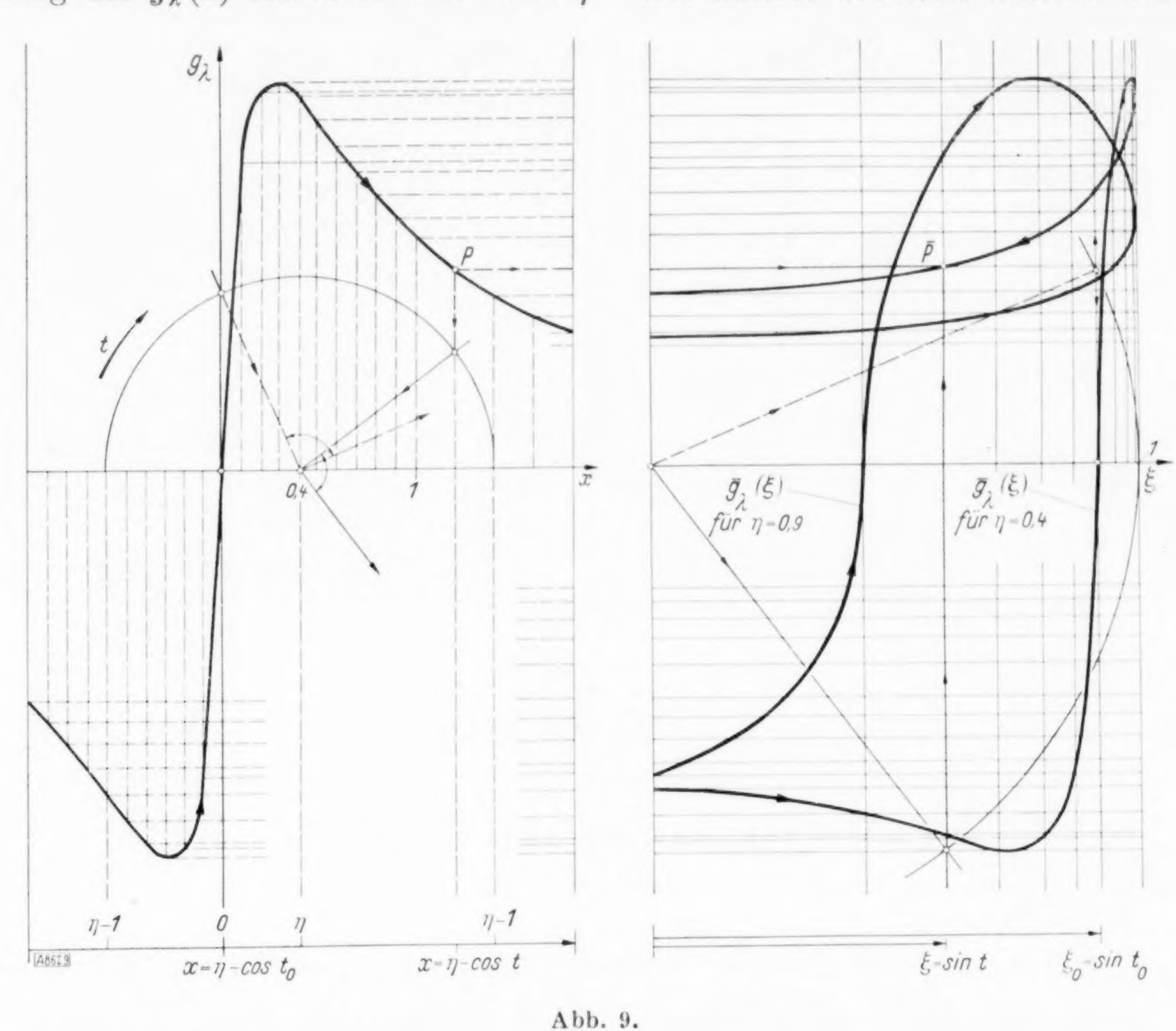


Abb. 9.

Im Falle g_s ist die Umzeichnung (da g_s beschränkt ist) ohne weiteres durchführbar, im Falle g_c müssen wir das Integral (wegen der Singularität des Integranden bei $u=\eta$) erst durch Abspaltung der Singularität der graphischen Behandlung zugänglich machen. Wir setzen

$$\pm g_c(\lambda\,|\eta-u|) = -\frac{1}{\lambda\,(\eta-u)} \pm R_c(\lambda\,|\eta-u|), \quad (\eta-u) \gtreqless 0$$

und betrachten

$$\lambda \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\, g_c\, du = -\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{\eta-u} + \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} (\pm R_c)\, du .$$

Das erste Integral ergibt nach Einführung von $2u = e^{it} + e^{-it}$, $\quad e^{it} = z$

$$-\int_{-1}^{+1} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{\eta-u} = \frac{1}{2i} \oint\limits_{(0)} \frac{z^2+1}{z^2-2\eta z+1} \cdot \frac{dz}{z} = \frac{1}{2i}\, 2\pi i \sum \mathrm{Res} = \pi, \quad (-1 < \eta < +1),$$

der Integrand R_c des zweiten Integrals ist beschränkt und wird auf zeichnerischem Wege wie g_s ausgewertet.

Der Verlauf von F ist in Abb. 10 und 11 dargestellt. Da nun aber nach dem vorigen

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} = -F_\lambda(\eta) \quad \text{mit} \quad \left.\frac{df}{d\eta}\right|_{\eta=0} = 0$$

gilt, erhalten wir

$$f(\eta) = -\iint_0^\eta F_\lambda(x)\, dx^2 + 2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\, \Phi(\lambda u)\, du .$$

Das zweifache Integral wird für feste λ Werte nach Aufzeichnung der $F_\lambda(\eta)$ Kurven mit dem Integraphen bestimmt.

Abb. 10.

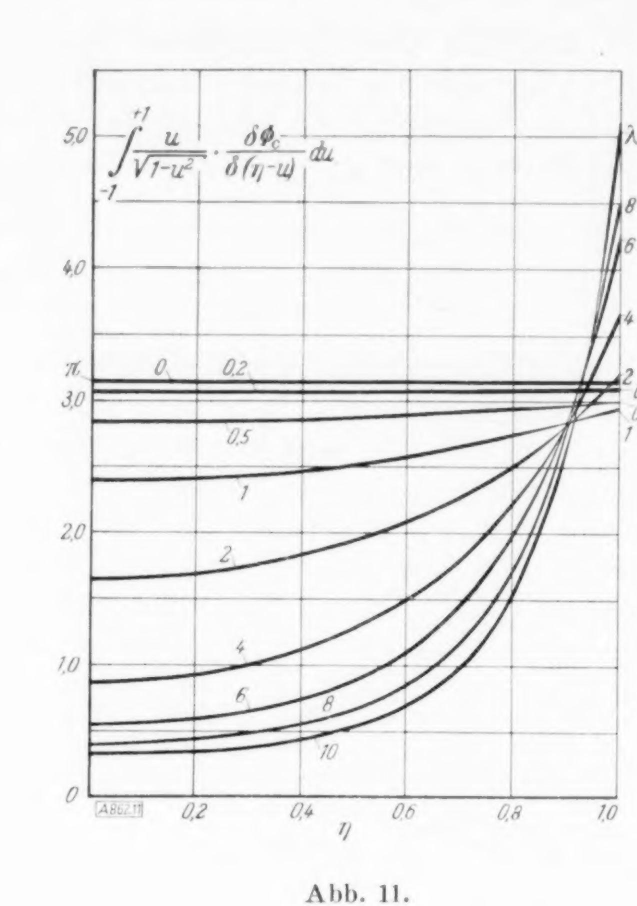


Abb. 11.

Im letzten Integral setzen wir $u = \sin t$ und erhalten

$$2\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,\Phi(\lambda u)\,du = \int_{t=0}^{\pi/2} \Phi(\lambda \sin t)\,d\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right).$$

Führen wir also $\xi = t + \frac{\sin 2t}{2}$ als neue Veränderliche ein, so ergibt sich $\int_0^{\pi/2} \overline{\Phi}_\lambda(\xi)\,d\xi$, wobei $\overline{\Phi}_\lambda(\xi)$ die auf die Abszisse ξ umgezeichnete $\Phi(\lambda \sin t) = \Phi_\lambda(\sin t)$ Kurve bedeutet. Im Falle Φ_s liegt der Umzeichnung, da Φ_s beschränkt ist, nichts im Wege. Φ_c wird dagegen bei $u=\eta$ logarithmisch unendlich, wir zerlegen also das Integral in $\int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1$. Der Zahlenwert des ersten Integrals wird durch Reihenentwicklung, der des zweiten durch Umzeichnung vermöge des Integraphen gewonnen (Abb. 12 und 13).

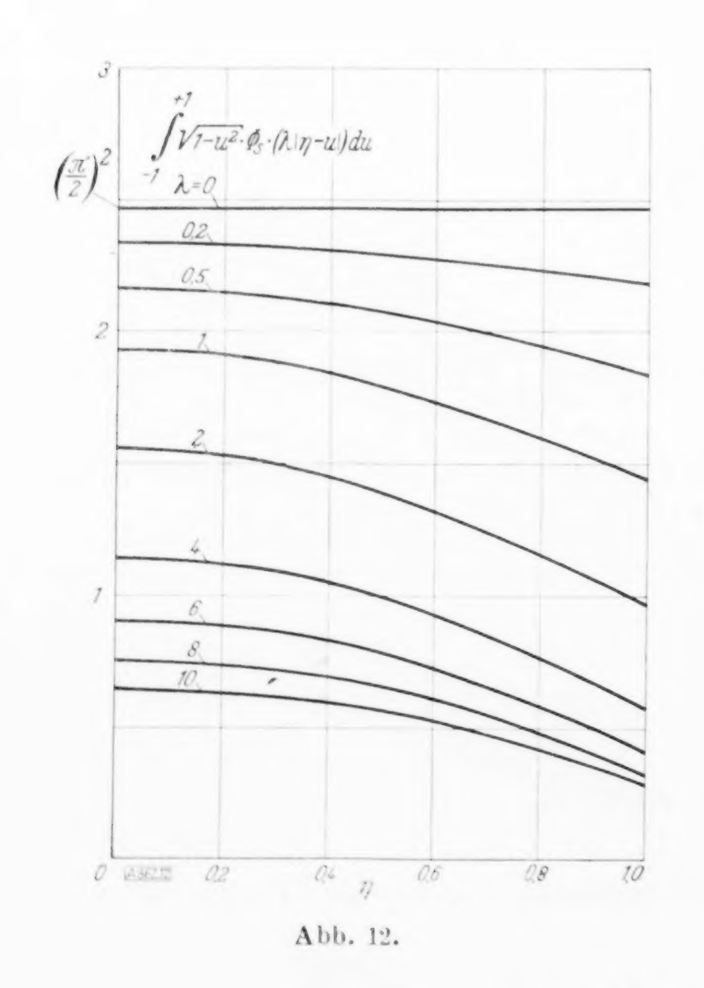


Abb. 12.

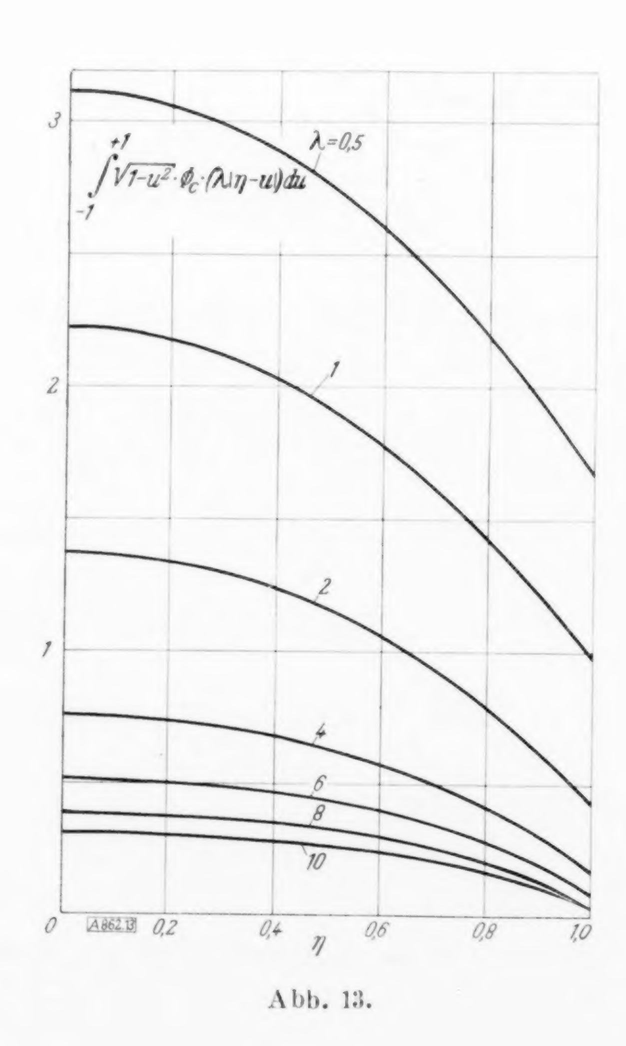


Abb. 13.

9. Die Korrektur des Anstellwinkels. In der anfangs angeführten Arbeit von Kassner und Fingado[5]) ist für das ebene Problem des harmonisch schwingenden Flügels der Anstellwinkel als Funktion des Geschwindigkeitssprunges der Unstetigkeitsfläche berechnet. Bezeichnen wir die letzt angeführte Größe mit $\bar{u} = u_0\, e^{i\sigma\tau}$, so gilt

$$\pi\, V \bar{\alpha} = \bar{u}\left[f_c\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right) - i\left(\frac{1}{\mu\, t} + f_s\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right)\right)\right],$$

wobei die Bedeutung von $f_{s,c}$ aus der unter [5]) zitierten Arbeit zu entnehmen ist.

Indem wir den Geschwindigkeitssprung durch die Gesamtzirkulation des ebenen Vergleichfalles ausdrücken, haben wir

$$\bar{\alpha}_{\text{Eben}} = -\frac{\Gamma_3\, \Gamma_2\, e^{i\sigma\tau}}{\pi\, V\, t}\left[\left(1 + \mu\, t\, f_s\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right)\right) + i\,\mu\, t\, f_c\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right)\right].$$

Nun gilt aber weiterhin nach dem vorigen die Winkelkorrektur des instationären Falles an der Stelle η

$$\Delta\bar{\alpha} = \frac{\Gamma_2\, e^{i\sigma\tau}}{4\,\pi\, V\, b}\left[A\,(\mu\, b, \eta) + i\, B\,(\mu\, b, \eta)\right]$$

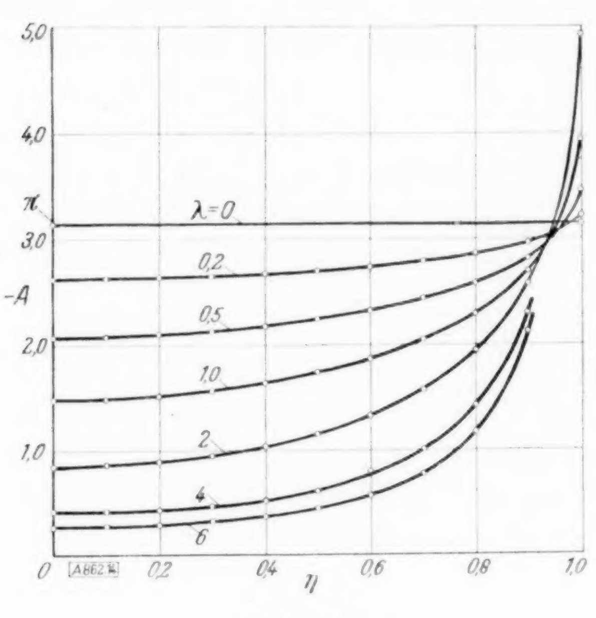


Abb. 14.

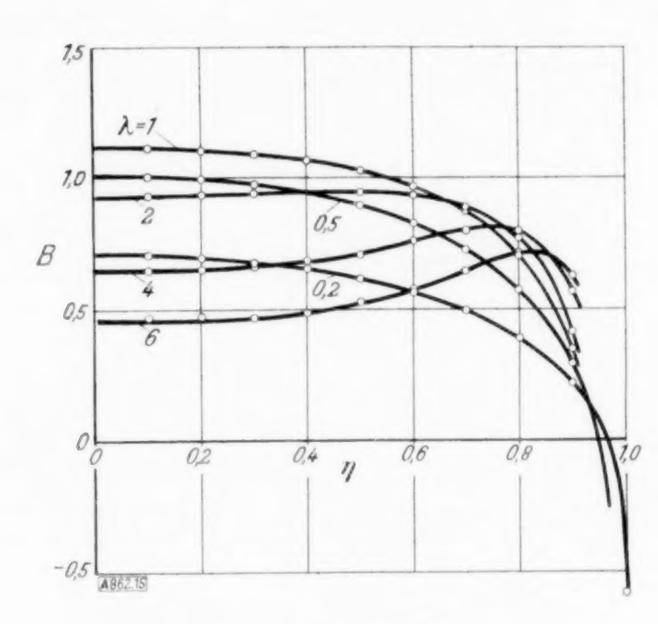


Abb. 15.

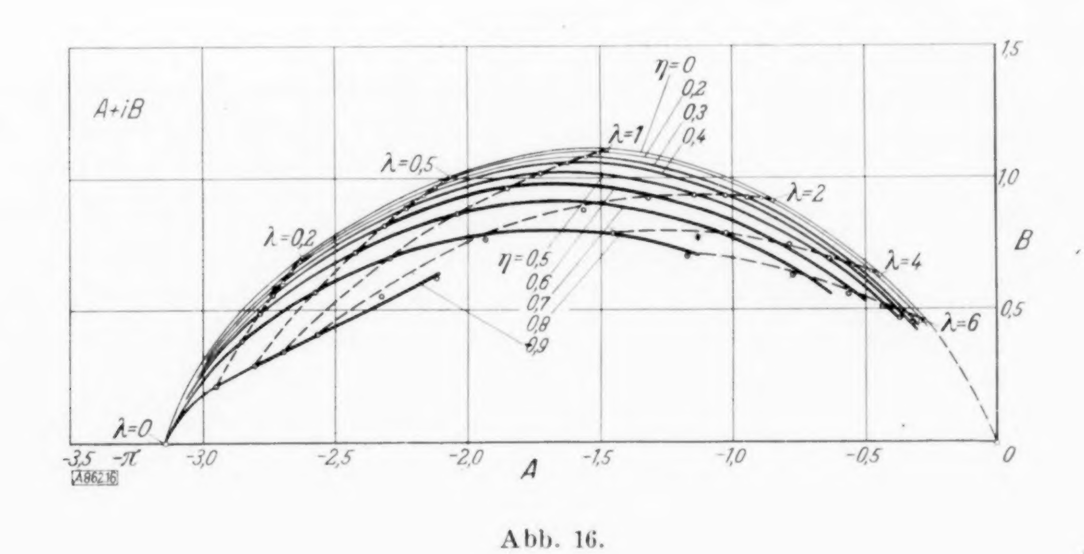


Abb. 16.

(Abb. 14, 15 und 16), woraus mit $\Gamma_3 = \sqrt{1-\eta^2}$ und der in der Tragflügeltheorie üblichen Orientierung des Winkels gegen die Anströmrichtung der ungestörten Strömung

$$\bar{\alpha}_{\text{Räumlich}} \approx \frac{\Gamma_{\text{eben}}}{\pi\, V\, t}\left[\left\{\left(1 + \mu\, t\, f_s\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right)\right)\sqrt{1-\eta^2} - \frac{t}{2\,S}\, A\left(\frac{1}{2}\,\mu\, S, \eta\right)\right\}\right.$$

$$\left. + i\left\{\mu\, t\, f_c\left(\frac{1}{2}\,\mu\, t\right)\sqrt{1-\eta^2} - \frac{t}{2\,S}\, B\left(\frac{1}{2}\,\mu\, S, \eta\right)\right\}\right]$$

folgt. Führen wir statt μ die Wellenlänge L ein und setzen $\frac{t}{2b} = \Omega$, so ergibt sich

$$\bar{\alpha}_{\text{Räumlich}} \approx \frac{\Gamma_{\text{eben}}}{\pi V t} \left[\left\{ \left(1 + 2 \left(\frac{\pi S}{L} \right) \Omega f_s \left(\frac{\pi S}{L} \Omega \right) \right) \sqrt{1 - \eta^2} - \frac{\Omega}{2} A \left(\frac{\pi S}{L}, \eta \right) \right\} \right.$$

$$\left. + i \left\{ 2 \left(\frac{\pi S}{L} \right) \Omega f_c \left(\frac{\pi S}{L} \Omega \right) \sqrt{1 - \eta^2} - \frac{\Omega}{2} B \left(\frac{\pi S}{L}, \eta \right) \right\} \right].$$

Da mit $a \to 0$ $a f_s(a)$, $a f_c(a)$, $B(a, \eta) \to 0$ und $A(a, \eta) \to -\pi$ geht, wird für endliches S, Ω und $L \to \infty$

$$\alpha_{\text{Räumlich, stationär}} = \frac{\Gamma}{\pi V t} \left[\sqrt{1 - \eta^2} + \frac{t}{2S} \pi \right].$$

Setzen wir noch elliptischen Umriß $t = t_0 \sqrt{1 - \eta^2}$ voraus und führen das Seitenverhältnis $\frac{F}{S^2} = \Lambda = \frac{t_0 \pi}{4S}$ ein, so erhalten wir

$$\alpha_{\text{Räumlich, stationär}} = \frac{\Gamma}{\pi V t_0} (1 + 2\Lambda),$$

d. h. das Prandtlsche Ergebnis des räumlichen stationären Falles. Unsere Gleichung stellt also für den instationären Fall in erster Näherung eine Erweiterung der Prandtlschen Gleichung für endliche Spannweite dar.

In Abb. 17 ist der Anstellwinkel als Funktion der Zirkulation $\bar{a} = \frac{\Gamma}{\pi V t} \cdot \bar{F}(\omega, \Omega, \eta)$ speziell für den Fall $\eta = 0$ skizziert, wobei $\Omega = \frac{t}{2b}$ und $\omega = \frac{2\pi S}{L}$ die reziproke Geschwindigkeitszahl[5]) bedeutet.

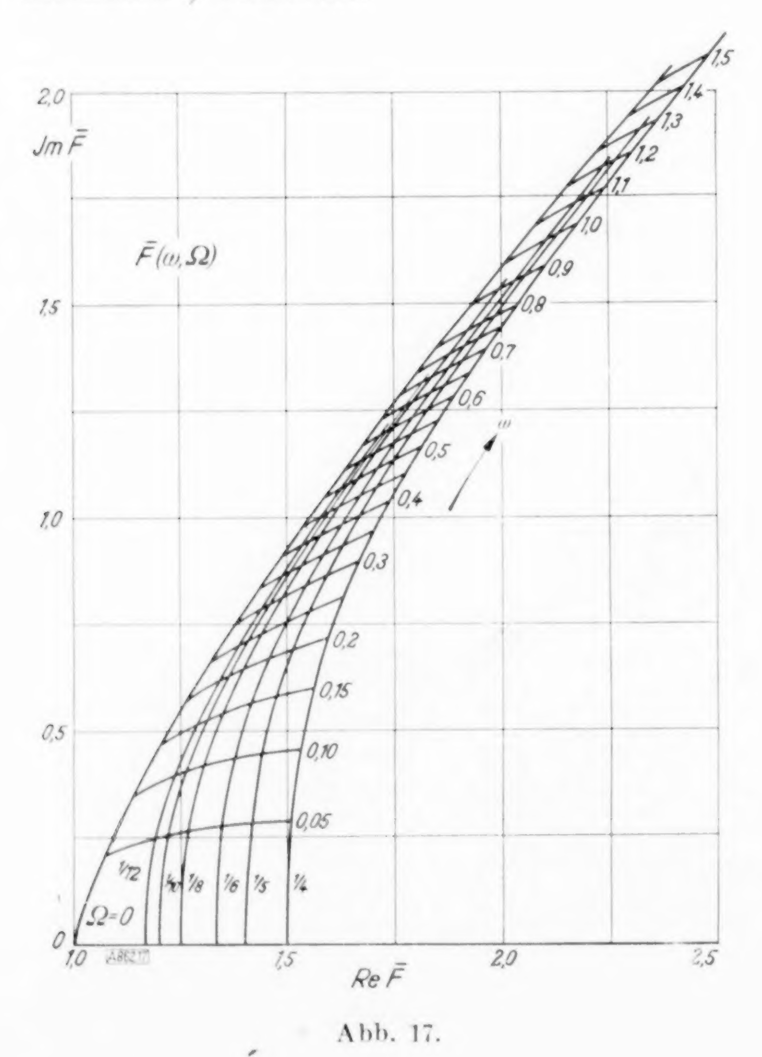


Abb. 17.

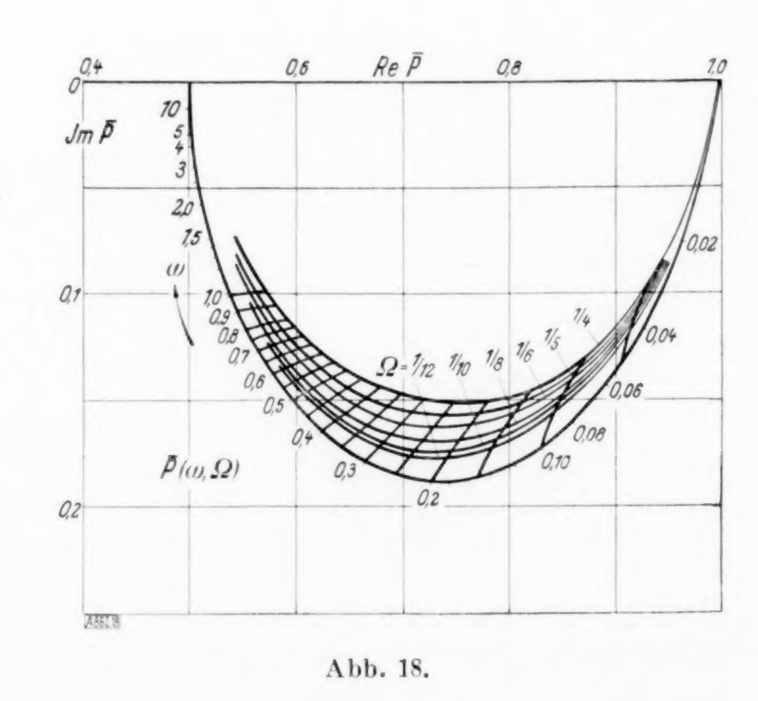


Abb. 18.

Übernehmen wir aus der unter[5]) zitierten Arbeit in erster Näherung den Auftrieb als Funktion der Zirkulation, so können wir analog der Kassner-Fingadoschen Darstellung den Auftrieb (ebenfalls in erster Näherung) als Funktion des Anstellwinkels durch den Auftriebsvektor $\bar{P}(\omega, \Omega, \eta)$ kennzeichnen. In Abb. 18 ist $\bar{P}$ speziell für den Fall $\eta = 0$ skizziert. $\Omega = 0$ entspricht beidemal dem Grenzfall der unendlichen Spannweite. 862

Zur Theorie der Wirbelbewegung.

Von *A. Kneschke* in Dresden (Sa.).

Die Theorie der Bewegung isolierter Wirbel in ebenen, einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsgebieten ist durch Arbeiten von Routh, Lagally und Masotti[1]) zu einem gewissen Abschluß gebracht worden. Bei allen diesen theoretischen Überlegungen wird von dem Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatz ausgegangen, daß die Bewegung jedes einzelnen Wirbels nicht von seinem eigenen Wirbelfeld beeinflußt wird, sondern daß der Wirbel sich vielmehr wie ein regulärer Punkt der nach Wegnahme seines eigenen Strömungsfeldes verbleibenden Strömung bewegt. Zahlreiche Abhandlungen beschäftigen sich mit der Auswertung der Routh-Lagallyschen Theorie und prüfen an Beispielen ihre Leistungsfähigkeit[2]). Dabei hat sich ergeben, daß der Helmholtz-Kirchhoffsche Grundsatz ein geeignetes Hilfsmittel zur Untersuchung der Bewegung von Wirbeln in begrenzten Flüssigkeitsgebieten darstellt. Während die Kirchhoffschen Untersuchungen sich nur auf den Fall beschränken, daß die freien Wirbel sich in der unbegrenzten Ebene bewegen, so haben Routh und Lagally in den zitierten Arbeiten ein Verfahren angegeben, das ermöglicht, die Bewegung isolierter Wirbel in einfach-zusammenhängenden Gebieten zu beschreiben. Von der speziellen Wirbelbewegung in der Halbebene ausgehend, hat M. Lagally mittels konformer Abbildung die Transformation auf solche Gebiete durchgeführt. — Im ersten Teile der vorliegenden Untersuchungen sollen die Bewegungsgleichungen der isolierten Wirbel allgemein aufgestellt werden. Weiterhin wird das Strömungsfeld der Wirbel energetisch untersucht und die Transformationsvorschrift der kinetischen Energie des Feldes aufgezeigt. Und im dritten Teile soll schließlich ein Minimalprinzip angegeben werden, das den Bewegungsgleichungen äquivalent ist und in energetischer Hinsicht Aufschlüsse über den Bewegungsvorgang der freien Wirbel in abgeschlossenen Gebieten geben kann.

Die Bewegungsgleichungen. In einem ebenen, einfach zusammenhängenden Flüssigkeitsgebiete G mit der zeitlich unveränderten Umrandung S sollen sich an den Stellen $z_\nu = a_\nu + i\, b_\nu$ n freie, isolierte Wirbel mit den Zirkulationen Γ_ν befinden. Die Umrandung S des Gebietes G ist als Stromlinie $\Psi = \text{const}$ aufzufassen.

Wie M. Lagally in der zitierten Arbeit erwähnt, lassen sich die Bewegungsgleichungen der Wirbel dadurch aufstellen, daß man ihnen in der unbegrenzten Ebene eine im Inneren von G reguläre, zeitlich veränderliche Potentialströmung überlagert, die die Normalkomponente der Gesamtbewegung an der Begrenzung S zum Verschwinden bringt. Wir können demnach als Stromfunktion für das Gebiet G ansetzen:

$$\left.\begin{aligned}\Psi = -\frac{\Gamma_k}{4\pi}\lg (x-a_k)^2+(y-b_k)^2 - {\sum_i}' \frac{\Gamma_i}{4\pi}\lg (x-a_i)^2+(y-b_i)^2 + {\sum_i}' f(x\, y;\; a_i\, b_i)\\ + f(x\, y;\; a_k\, b_k)\end{aligned}\right\} \quad . \quad \text{(I)},$$

wobei also unter $f(x, y;\; a_i, b_i)$ der in G reguläre Anteil der Stromfunktion zu verstehen ist, der durch das Vorhandensein des i^{ten} Wirbels bedingt ist und dazu beiträgt, die Umrandung S als Stromlinie auftreten zu lassen. Ψ ist — kurz gesagt — Greensche Funktion des Differentialausdruckes $\Delta \Psi$ für G, woraus ihre Symmetrieeigenschaft $f(x, y;\; \xi, \eta) = f(\xi, \eta;\; x, y)$ offensichtlich wird. Daß der dem k^{ten} Wirbel entsprechende Anteil von der Summe abgetrennt wird, ist analytisch, wie wir sehen werden, zweckmäßig. Nach dem Helmholtz-Kirchhoffschen Grundsatze werden die Komponenten der Geschwindigkeit des k^{ten} Wirbels lauten:

$$\frac{d\, a_k}{d\, t} = \frac{\partial}{\partial\, b_k}\left\{-{\sum_i}' \frac{\Gamma_i}{4\pi}\lg (a_k-a_i)^2+(b_k-b_i)^2 + {\sum_i}' f(a_k\, b_k;\; a_i\, b_i)\right\}$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\, y} f(x\, y;\; a_k\, b_k)\Bigg|_{\substack{x=a_k\\ y=b_k}}$$

---

[1]) E. J. Routh: Some applications of conjugate functions. Proc. London Math. Soc. 12, 1880, 73. — M. Lagally: Über ein Verfahren zur Transformation ebener Wirbelprobleme. Math. Z. 10, 1921, 231. — A. Masotti: Sul moto di un vortice rettilineo. Atti della Pont. Accad. d. Sc. Nuov. Lincei 1931, 235. Sopra una propriéta energetica del moto di un vortice rettilineo. Atti della Pont. Accad. d. Sc. Nuov. Lincei 1931, 464. Sulle azioni dinamiche dovute ad un vortice rettilineo. Atti della Pont. Accad. d. Sc. Nuov. Lincei 1931, 3.

[2]) E. Paul: Bewegung eines Wirbels in geradlinig begrenzten Gebieten. ZAMM 14, 1934. — A. Kneschke: Über die Ruhelagen von Wirbeln. ZAMM 14, 1934. — W. Barth: Wirbelbahnen um Wände und Platten. ZAMM 10, 1930. — A. Kneschke und S. Matthes: Wirbelbewegung um einen Kreiszylinder. Ann. d. Phys. 9, 1931. Vom allgemeinen Verfahren etwas abweichend behandelt G. Hamel in der ZAMM 13, 1933 die Wirbelbewegung um eine Buhne.

$$-\frac{d b_k}{d t} = \frac{\partial}{\partial a_k} \left\{ -\sum_i{}' \frac{\Gamma_i}{4\pi} \lg (a_k - a_i)^2 + (b_k - b_i)^2 + \sum_i{}' f(a_k\, b_k;\, a_i\, b_i) \right\}$$
$$+ \frac{\partial}{\partial x} f(x\, y;\; a_k\, b_k) \Big|_{\substack{x = a_k \\ y = b_k}} .$$

Da ferner als Folge der Symmetrie von f die Beziehungen

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y;\; a, b) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial a} f(a, b;\; a, b), \qquad \frac{\partial}{\partial y} f(x, y;\; a, b) \Big|_{\substack{x=a \\ y=b}} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial b} f(a, b;\; a, b)$$

gelten[3]), können die Geschwindigkeiten durch partielle Ableitungen der sogenannten Routhschen Funktion

$$X_k = -\sum_i{}' \frac{\Gamma_i}{4\pi} \lg (a_k - a_i)^2 + (b_k - b_i)^2 + \sum_i{}' f(a_k\, b_k;\;\, a_i\, b_i) + \frac{1}{2} f(a_k\, b_k;\;\, a_k\, b_k) \quad . \quad . \quad \text{(II)}$$

in der Form

$$\frac{d a_k}{d t} = \frac{\partial X_k}{\partial b_k}, \qquad -\frac{d b_k}{d t} = \frac{\partial X_k}{\partial a_k} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(III)}$$

dargestellt werden.

Kinetische Energie des Strömungsgebietes R. Die Form dieser Bewegungsgleichungen läßt einen Zusammenhang der Routhschen Funktion mit der Strömungsenergie des Feldes vermuten. — Schaltet man in bekannter Weise durch Kreise σ_k mit den Radien ε_k die singulären Stellen z_k ($k = 1, 2 \ldots n$) aus, so zerfällt das Gesamtgebiet G in kreisförmige Wirbelgebiete W_k und in ein Restgebiet R (Abb. 1). Vorerst soll für das Strömungsgebiet R die

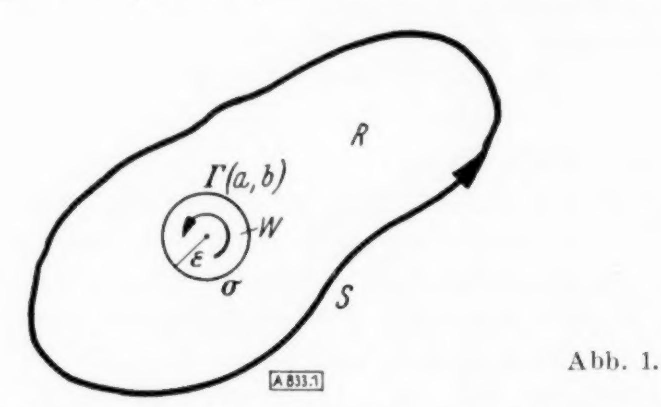


Abb. 1.

kinetische Energie der Flüssigkeit von der Dichte ϱ berechnet werden; sie ist gegeben durch

$$T_R = \frac{\varrho}{2} \iint_R (\Psi_x{}^2 + \Psi_y{}^2)\, dx\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(1)},$$

woraus durch partielle Integration folgt:

$$T_R = -\frac{\varrho}{2} \iint_R \Psi \varDelta \Psi\, dx\, dy - \frac{\varrho}{2} \oint_S \Psi (\Psi_y\, dx - \Psi_x\, dy) + \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \oint_{\sigma_k} \Psi (\Psi_y\, dx - \Psi_x\, dy).$$

Wegen der Wirbelfreiheit von R aber verschwindet das Flächenintegral; das Integral über die Berandung S aber liefert einen Beitrag zur Energie, weil auf der Begrenzung des Gebietes $\Psi = \Psi_0 = \text{const}$ ist. Nach Normierung auf $\Psi = 0$ verschwindet dieser Integralwert, so daß zur Berechnung von T_R der Ausdruck

$$T_R = \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \oint_{\sigma_k} \Psi (\Psi_y\, dx - \Psi_x\, dy) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{(1a)}$$

---

[3])
$$\frac{\partial f(x, y;\; \xi, \eta)}{\partial x} \Big|_{\substack{x = \xi \\ y = \eta}} = \lim_{\varDelta \xi \to 0} \frac{f(\xi + \varDelta \xi, \eta;\; \xi, \eta) - f(\xi, \eta;\; \xi, \eta)}{\varDelta \xi}$$

andererseits ist:

$$\frac{\partial f(\xi, \eta;\; \xi, \eta)}{\partial \xi} = \lim_{\varDelta \xi \to 0} \frac{f(\xi + \varDelta \xi, \eta;\; \xi + \varDelta \xi, \eta) - f(\xi, \eta;\; \xi, \eta)}{\varDelta \xi},$$

woraus sich durch Entwickeln des Zählers ergibt:

$$\frac{\partial f(\xi, \eta;\; \xi, \eta)}{\partial \xi} = 2 \lim_{\varDelta \xi \to 0} \frac{f(\xi + \varDelta \xi, \eta;\; \xi, \eta) - f(\xi, \eta;\; \xi, \eta)}{\varDelta \xi} = 2 \frac{\partial f(x, y;\; \xi, \eta)}{\partial x} \Big|_{\substack{x = \xi \\ y = \eta}} .$$

zur Verfügung steht. Nach (I) ist demnach die Integralsumme, wenn man den bei z_k regulären Anteil der Stromfunktion einstweilen mit $r(x, y)$ bezeichnet,

$$T_R = \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \oint_{\sigma_k} \left\{ r(x,y) - \frac{\Gamma_k}{4\pi} \lg \left[(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 \right] \right\} \left\{ \frac{\partial r}{\partial y} dx - \frac{\partial r}{\partial x} dy \right\}$$

$$+ \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2\pi} \oint_{\sigma_k} \left\{ r(x,y) - \frac{\Gamma_k}{4\pi} \lg \left[(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2 \right] \right\} \frac{(x-a_k)\,dy - (y-b_k)\,dx}{(x-a_k)^2 + (y-b_k)^2}$$

auszuwerten. Setzt man $x = a_k + \varepsilon_k \cos\varphi$ und $y = b_k + \varepsilon_k \sin\varphi$ für die Integration längs der Kreise σ_k mit ihren Radien ε_k, so erkennt man, wenn nach dem Mittelwertsatze

$$r \Big|_{\substack{x=a_k \\ y=b_k}} = - \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{\Gamma_i}{4\pi} \lg \left[(a_k - a_i)^2 + (b_k - b_i)^2 \right] + \sum_{i=1}^{n}{}' f(a_k\, b_k;\; a_i\, b_i) + f(a_k\, b_k;\; a_k\, b_k) = \Psi_{(k)}$$

vor das Linienintegral gesetzt wird, daß das erste Integral für beliebiges ε_k verschwindet und das zweite Integral den Wert

$$T_R = 2\pi\varrho \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{4\pi} \left(\Psi_{(k)} - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \lg \varepsilon_k \right)$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$\left. \begin{aligned} T_R = 2\pi\varrho \Bigg\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{4\pi} \Bigg(& - \sum_{i=1}^{n}{}' \frac{\Gamma_i}{4\pi} \lg \left[(a_k - a_i)^2 + (b_k - b_i)^2 \right] \\ & + \sum_{i=1}^{n}{}' f(a_k\, b_k;\; a_i\, b_i) + f(a_k\, b_k;\; a_k\, b_k) - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \lg \varepsilon_k \Bigg) \Bigg\} \end{aligned} \right\} \quad \ldots\ldots \quad (\mathrm{IV})$$

erhält. Um nun den Zusammenhang der kinetischen Energie mit der Routhschen Funktion aufzuzeigen, braucht man nur ihre partiellen Ableitungen unter Berücksichtigung der Symmetrie von f zu bilden; also:

$$\frac{\partial T_R}{\partial a_\mu} = \varrho\, \Gamma_\mu \frac{\partial X_\mu}{\partial a_\mu} = -\varrho\, \Gamma_\mu \frac{d b_\mu}{d t}, \qquad \frac{\partial T_R}{\partial b_\mu} = \varrho\, \Gamma_\mu \frac{\partial X_\mu}{\partial b_\mu} = \varrho\, \Gamma_\mu \frac{d a_\mu}{d t}.$$

Die Bewegungsgleichungen lauten dann

$$\varrho\, \Gamma_\mu \frac{d a_\mu}{d t} = \frac{\partial T_R}{\partial b_\mu}, \qquad -\varrho\, \Gamma_\mu \frac{d b_\mu}{d t} = \frac{\partial T_R}{\partial a_\mu} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{V}),$$

wobei

$$T_R = \varrho \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{2} \left(\Psi_{(k)} - \frac{\Gamma_k}{2\pi} \lg \varepsilon_k \right)$$

zu setzen ist. Multipliziert man die erste der Gleichungen (V) mit $d b_\mu$, die zweite mit $d a_\mu$, so folgt nach Summation beider als Integral der Differentialgleichungen der Wirbelbahnen

$$T_R = \mathrm{const} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\mathrm{VI}),$$

worin der Satz von der Erhaltung der kinetischen Energie der Strömung während der Bewegung zum Ausdruck kommt. Schreibt man die Energie in der Form

$$T_R = 2\pi\varrho \left\{ \Omega(a_1 \ldots a_n;\; b_1 \ldots b_n) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k^2}{8\pi^2} \lg \varepsilon_k \right\}$$

mit $\Omega = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k\, \Psi_{(k)}$, so erkennen wir in Ω die Kirchhoffsche Bahnfunktion[4]),

[4]) Dieser Zusammenhang ist bereits von E. Trefftz erkannt worden und findet sich ebenfalls in der an zweiter Stelle angegebenen Arbeit von Masotti.

die also im wesentlichen die kinetische Energie des Strömungsfeldes unter Ausschluß der Wirbelzentren darstellt. Sie ist abhängig allein von der gegenseitigen Lage der Wirbel und von der Begrenzung des Flüssigkeitsgebietes. Wir wollen diese Energie T_R deshalb als „Lageenergie" des Wirbelsystems bezeichnen.

Es ist wichtig zu wissen, wie die Energie T_R im Gebiet G mit der komplexen Veränderlichen $z = x + i y$ durch konforme Abbildung auf ein Gebiet G_0 mit der Veränderlichen $\zeta = \xi + i \eta$ durch die Funktion $z = f(\zeta)$ sich transformiert. Bei einer derartigen Abbildung werden auch die singulären Stellen in G in solche in G_0 übergeführt; insbesondere geht ein in G an der Stelle $z_k = a_k + i b_k$ gelegener Wirbel in einen in G_0 an der Stelle $\zeta_k = \alpha_k + i \beta_k$ gelegenen über. Wir erhalten demnach aus IV, weil $\lim \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k_0}} = \frac{|d z_k|}{|d \zeta_k|} = |f'(\zeta_k)|$,

$$T_{R_0} = 2 \pi \varrho \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{4 \pi} \left(\Psi_{(k)} - \frac{\Gamma_k}{2 \pi} \lg |f'(\zeta_k)| - \frac{\Gamma_k}{2 \pi} \lg \varepsilon_{k_0} \right)$$

oder

$$T_{R_0} = T_R - \varrho \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \lg |f'(\zeta_k)|, \qquad \text{(VII)},$$

wenn man in dieser Transformationsvorschrift in T_R mittels der Gleichung $a_k + i b_k = f(\alpha_k + i \beta_k)$ die Koordinaten a_k und b_k durch α_k und β_k ersetzt. Für das Gebiet G_0 läßt sich demnach die Energie in der Form

$$T_{R_0} = 2 \pi \varrho \sum_{k=1}^{n} \frac{\Gamma_k}{4 \pi} \left(\Psi^0_{(k)} - \frac{\Gamma_k}{2 \pi} \lg \varepsilon_{k_0} \right)$$

mit

$$\Psi^0_{(k)} = \Psi_{(k)} - \frac{\Gamma_k}{2 \pi} \lg |f'(\zeta_k)|$$

anschreiben.

Ein Variationsprinzip. Die meisten Differentialgleichungen der mathematischen Physik stehen in enger Beziehung zu Variationsprinzipen. Daher liegt die Vermutung nahe, daß auch die Bewegungsgleichungen für freie, isolierte Wirbel sich als Eulersche Gleichungen aus einem Minimalprinzip mit Hilfe der Methoden der Variationsrechnung herleiten lassen. — Offenbar lautet in unserem Falle dieses Grundgesetz der Wirbelbewegung, wenn man einen Ausdruck[5]) $T_b = \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \left(b_k \frac{d a_k}{d t} - a_k \frac{d b_k}{d t} \right)$ als „Energiefunktion" des Wirbelsystems einführt,

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T_b - T_R) \, d t = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

oder: In einem gegebenen ebenen Strömungsfelde bewegen sich freie, isolierte Wirbel so, daß das Wirkungsintegral

$$I = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \frac{\varrho}{2} \sum_{k=1}^{n} \Gamma_k \left(b_k \frac{d a_k}{d t} - a_k \frac{d b_k}{d t} \right) - T_R \right\} d t \qquad \text{(IX)}$$

gegenüber allen benachbarten, virtuellen Bewegungen, die in demselben Zeitintervall von der Ausgangslage des Wirbelsystems zur Endlage führen, stationär wird. Kürzer formuliert: Für die wirkliche Bewegung der freien Wirbel ist der zeitliche Mittelwert der Differenz aus der „Energiefunktion" T_b der Wirbel und der „Lageenergie" T_R des wirbelfreien Strömungsgebietes stationär[6]). — Nach den Vorschriften der Variationsrechnung ergeben sich hieraus sofort die allgemeinen Bewegungsgleichnungen

$$\varrho \Gamma_\mu \frac{d a_\mu}{d t} = \frac{\partial T_R}{\partial b_\mu}, \qquad - \varrho \Gamma_\mu \frac{d b_\mu}{d t} = \frac{\partial T_R}{\partial a_\mu},$$

die mit (V) übereinstimmen. Damit aber ist die Richtigkeit dieses Minimalprinzipes bereits bewiesen.

[5]) Die hydrodynamische Deutung des Energieausdruckes T_b ist bisher nicht einwandfrei gelungen.

[6]) Für Ratschläge bei der Abfassung der Arbeit sei Herrn Prof. Prandtl herzlichst gedankt.

Über Lüders-Hartmannsche Linien.

Von *Endre Reuss* in Budapest.

1. Allgemeines über die Fließgrenze. Bei der Formänderung von Flußstahl und einigen anderen Materialien beobachtet man im Augenblick, wenn die Spannungen die Fließgrenze erreichen, an der Oberfläche das Erscheinen von Fließfiguren. Diese Fließfiguren, auch Lüders-Hartmannsche Linien genannt, bilden zwei nahezu orthogonale Liniensysteme, welche überall in die Richtung der Hauptschubspannung fallen. Ihre Anwesenheit kann an der ursprünglichen Oberfläche, aber auch auf Schliffen durch das Innere des Körpers durch die Frysche Ätzmethode sichtbar gemacht werden: sie sind die Spuren von Fließschichten an der jederzeitigen Oberfläche.

Die Frysche Ätzung greift vorzugsweise die am stärksten verformten Stellen des Schliffes an und zeigt, daß das Material der Fließschichten eine große bleibende Verformung erlitten hat, während das sie umgebende Material praktisch unverändert blieb. Man schließt hieraus, daß die Formänderung an der Fließgrenze nicht stetig, sondern in den Fließschichten stattfindet.

Dieser räumlichen Unstetigkeit der Formänderung kann eine zeitliche Unstetigkeit der Spannung gegenübergestellt werden, die Unstetigkeit an der Fließgrenze.

Wird ein Zerreißprobekörper aus Flußstahl in der Versuchsmaschine allmählich verformt, so steigt die Spannung nahezu proportional zur Formänderung an, bis sie an der „oberen Fließgrenze" plötzlich auf einen niedrigeren Wert, auf die „untere Fließgrenze" herunterfällt.

Die beschriebene Unstetigkeit tritt nicht nur beim Zugversuch auf, sondern kann auch beim Biegungs- oder Verdrehungsversuch wahrgenommen werden, indem bei diesen Versuchen die Belastung an der Fließgrenze oft etwas fällt.

Betrachten wir den Verdrehungsversuch an einem kreisrunden Stab etwas näher. Der allgemeinen Gepflogenheit folgend nehmen wir an, daß die Spannung auf den zur Stabachse konzentrischen Zylinderflächen konstant ist. Dies folgt aus der axialen Symmetrie der Formänderung und aus der Annahme, daß die Spannung $\tau(\gamma)$ eine eindeutige Funktion der Schiebung γ ist. Bezeichnet ϑ die relative Verdrehung zweier Querschnitte der Entfernung l, r den Halbmesser irgendeines der erwähnten Zylinder, R den Halbmesser des Stabes, so ist $\gamma = \frac{r\,\vartheta}{l}$ und das Drehmoment der Spannungen

$$M = \int_0^R 2\,\pi\, r^2\, \tau(\gamma)\, d\, r.$$

Differentiation und darauffolgende partielle Integration liefert

$$\frac{d\,M}{d\,\vartheta} = 2\,\pi \int_0^R \frac{d}{d\,\gamma}\,\tau(\gamma)\cdot\frac{r}{l}\cdot r^2\, d\, r = 2\,\pi\,\frac{R^3\,\tau(\gamma)}{\vartheta} - 3\,\frac{M}{\vartheta},$$

woraus

$$\tau(\gamma) = \frac{1}{2\,\pi\, R^3}\left(\vartheta\,\frac{d\,M}{d\,\vartheta} + 3\,M\right) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

folgt.

Will man mit Hilfe dieser Gleichung aus dem Drehmoment-Verdrehungsdiagramm den für das Material charakteristischen Zusammenhang zwischen der Schubspannung und der Schiebung, $\tau(\gamma)$, berechnen, so erhält man an den Stellen, wo das Drehmoment fällt, für τ so kleine Werte, daß diese mit anderen Versuchen nicht in Einklang gebracht werden können. Ja, schon an einer Fließgrenze mit $\frac{d\,M}{d\,\vartheta} = 0$, bis zu der sich der Körper ideal elastisch verhält und dem Proportionalitätsgesetz folgt, müßte $\tau(\gamma)$ von seinem Maximalwert auf dessen $^3/_4$ Teil herabfallen, da aus dem Proportionalitätsgesetz $\vartheta\,\frac{d\,M}{d\,\vartheta} = M$ folgt.

Für den Biegungsversuch ergeben sich ähnliche Verhältnisse: die aus dem Biegungsversuch berechneten $\sigma(\varepsilon)$ Werte stehen mit den unmittelbar aus dem Zugversuch erhaltenen im krassen Widerspruch. Daß sie im späteren Verlauf der Formänderung miteinander gut übereinstimmen, deutet darauf hin, daß unsere Vorstellungen über die plastische Formänderung im Grunde genommen richtig sind und nur für die Fließgrenze einer Berichtigung bedürfen.

Den Weg aus diesem Widerspruch weist uns die unmittelbare Beobachtung. Das Auftreten der Lüders-Hartmannschen Linien zeigt, daß unsere Annahme betreffend der Gleichheit der Spannungszustände auf koaxialen Zylindern falsch ist. Auch bei Berechnung des Momentes bei der reinen Biegung eines rechteckigen Stabes wurde bisher immer angenommen, daß in den zur neutralen Ebenen parallelen Ebenen überall derselbe Spannungszustand herrscht. Aus dem Auftreten von Fließfiguren folgt, daß man in diesen Fällen mit einem viel verwickelteren Spannungszustand rechnen muß.

Es ist allgemein bekannt, daß das Auftreten von Fließfiguren eine Materialeigenschaft ist, die nicht auf eine Beanspruchungsart beschränkt ist. Wir schließen hieraus, daß der Mechanismus der Entstehung von Fließfiguren von der Beanspruchungsart weitgehend unabhängig ist. Gelingt es, für einen speziellen Fall die Entstehung der Gleitschichten, die Spannungsverteilung und das Fortschreiten der Formänderung in alle Einzelheiten zu verfolgen, so glauben wir uns berechtigt anzunehmen, daß der so beschriebene Mechanismus auch für andere Belastungsfälle nahezu derselbe ist.

Um überhaupt Berechnungen durchführen zu können, muß ein idealisierter Körper ins Auge gefaßt werden.

Wir nehmen an, daß sich unser Körper für große Formänderungen ideal plastisch verhält, in dem Sinne, daß die größte Schubspannung immer gleich einer konstanten kritischen Schubspannung k ist. Für kleine Formänderungen soll sich unser Körper ideal elastisch verhalten und das Proportionalitätsgesetz befolgen. Der Erscheinung der „oberen" und „unteren" Fließgrenze tragen wir dadurch Rechnung, daß wir dem Vorgehen von Nakanishi, Prager, Odqvist[1]) folgend annehmen, daß die Schubspannung im elastischen Gebiet auch über den kritischen Wert k steigen kann. Die Körperteile mit $\tau > k$ befinden sich in einem labilen Gleichgewichtszustand.

Die Frage, unter welchen Umständen ein labiler Spannungszustand bestehen kann, erscheint als eines der wichtigsten der noch ungelösten Probleme der Plastizitätstheorie. Am einfachsten ist die Annahme einer maximalen elastischen Hauptschubspannung. Nach Prager hängt dieser Höchstwert auch von der Körperform ab. Es ist möglich, daß für die Stabilität des Spannungszustandes außer den Spannungskomponenten deren räumliche Abgeleiteten maßgebend sind.

Glücklicherweise spielt dieses Problem in unseren Betrachtungen keine Rolle, so daß wir diese Frage ruhig offen lassen können. Es genügt uns im folgenden die triviale Tatsache, daß an den Stellen, wo sich für die elastischen Spannungen unendliche Werte ergeben, kein elastischer, sondern nur mehr ein plastischer Zustand herrschen kann.

Im Übergangszustand vom ideal elastischen zum ideal plastischen nehmen wir an, daß der Körper aus räumlichen rein elastischen Gebieten besteht, die von flächenhaften ideal plastischen Gebieten durchsetzt sind.

Die flächenhaften Gebiete, die Gleitflächen, welche die Fließschichten endlicher Dicke idealisieren, sind Unstetigkeitsflächen, so daß Punkte, die auf beiden Seiten derselben zueinander unendlich nahe waren, sich nachher um eine endliche Strecke entfernen. Die ganze plastische Formänderung ist also in diese Gleitflächen konzentriert. Auch die Spannungskomponenten erleiden an den Gleitflächen Sprünge, aber so, daß sie die Gleichgewichtsbedingungen überall erfüllen. Sie müssen in den Gleitflächen außerdem der Fließbedingung $\tau = k$ genügen.

2. Qualitative Betrachtungen über den Verdrehungsversuch. Wir wenden uns nun dem speziellen Beispiel zu, an dem wir alle Einzelheiten der plastischen Formänderung an der Fließgrenze verfolgen wollen: der Torsionsbeanspruchung eines Stabes von beliebigem Querschnitt. Im rein elastischen Gebiet wird der Spannungszustand durch eine einzige Spannungsfunktion erschöpfend beschrieben und durch das Prandtlsche Membrangleichnis veranschaulicht. Im ideal plastischen Gebiet läßt sich die Spannungsverteilung ganz ähnlich beschreiben, indem das Membrangleichnis zum Sandhaufengleichnis ergänzt wird, so daß das Ausweichen der Membrane durch eine Böschungsfläche über dem Querschnitt begrenzt wird.

Da die Schubspannungen in der Querschnittsfläche Hauptschubspannungen sind, besteht das eine System von Gleitflächen aus Querschnittsebenen, das andere System steht hierzu senkrecht, muß also aus Zylinderflächen bestehen, die zur Stabachse parallel sind. Die Querschnittsebenen sind in diesem Falle miteinander offenbar nicht mehr gleichwertig, was eine beträchtliche Verwicklung des Problems mit sich bringt. Um dies zu vermeiden, lassen wir das System von Gleitflächen, welches aus lauter Querschnittsebenen besteht, ganz außer Acht und stellen so die Gleichwertigkeit aller Querschnitte wieder her. Ob dies zulässig ist, läßt

[1]) Vgl. W. Prager: Mécanique des solides isotropes au delà du domaine élastique. (Mémorial des sciences mathématiques.) Paris, Gauthier-Villars 1937, wo auch ausführlichere Literaturhinweise zu finden sind.

sich bestreiten. Es läßt sich dagegen einwenden, daß die einzelnen Systeme von Gleitflächen nicht einzeln untersucht werden können, weil plastische Spannungszustände nicht superponierbar sind; daß beim Verdrehungsversuch plastischer Körper der Bruch stets als Gleitbruch in der Querschnittsebene stattfindet und daß durch die blockierende Wirkung der Einspannköpfe eben das Zustandekommen des zur Stabachse parallelen Systems gehemmt wird. Trotz dieser Einwände müssen wir das aus Querschnittsflächen bestehende System doch außer Acht lassen, da wir sonst überhaupt keine Berechnungen durchführen könnten. Die Berücksichtigung dieses Systems muß als eine weitere, noch zu lösende Aufgabe betrachtet werden.

Die Spuren der Gleitflächen auf den Querschnittsebenen nennen wir im folgenden Gleitlinien. In den Gleitflächen ist die Schubspannung zur Stabachse parallel und hat den Wert k. Berücksichtigt man die Symmetrie des Spannungstensors, so schließt man daraus, daß die zur Gleitlinie normale Komponente der Schubspannung in den Querschnittsebenen ebenfalls den Wert k hat. Folglich werden die Gleitlinien im Membrangleichnis durch Kurven mit konstantem, der Spannung k entsprechendem Gefälle dargestellt.

Bei starker Verdrehung, wo das Sandhaufengleichnis angewandt werden kann, sind die Linien mit dem Gefälle k die geraden Erzeugenden der Böschungsfläche über dem Querschnittsumriß. Die Gleitflächen sind also Ebenen, welche zur Mantelfläche senkrecht stehen. Wir nehmen an, daß dies auch nahe zur Fließgrenze so ist. Diese Annahme wird auch durch das vorhandene reiche Versuchsmaterial[2]) gestützt.

Auf Grund unserer Annahmen können wir nun folgenden Satz aussprechen: Die Membrane, welche den Spannungszustand nach Überschreitung der Fließgrenze veranschaulicht, schmiegt sich einem Skelett der Böschungsfläche an, welche aus lauter Erzeugenden besteht. Die Schubspannung wird hierbei stellenweise größer als k ausfallen.

Wir sind nun in der Lage, die Ausbildung des plastischen Zustandes Schritt für Schritt zu verfolgen. Dynamische Einflüsse sollen nicht berücksichtigt werden.

Laut unseren Annahmen kann die Schubspannung im rein elastischen Zustand die untere Fließspannung k überschreiten, so daß in Teilen des Querschnittes ein labiles Gleichgewicht besteht. Dieses labile Gleichgewicht soll an irgendeiner Stelle, vermutlich dort, wo die Schubspannung am größten ist, aufhören. Einem bekannten Satze der Potentialtheorie zufolge tritt die größte Schubspannung am Umfang auf. An dieser Stelle fällt die Schubspannung auf k herunter. Es entsteht eine Störungsstelle, die ähnlich wie eine Kerbe wirkt und zum Vordringen der Störung führt.

Dieser Vorgang kann am Membrangleichnis veranschaulicht werden. Von der Stelle der größten Schubspannung an wird die Membrane durch eine sich nach dem Inneren verlängernde Erzeugende der Böschungsfläche niedergedrückt. Auf diese Weise entsteht die erste Gleitlinie.

Wann kommt das Vordringen der Gleitlinie zum Stillstand? Denken wir uns die Erzeugende der Böschungsfläche genügend verlängert, so gibt es einen Punkt, bis zu welchem die Membrane sich der Erzeugenden anschmiegt. Wir behaupten, daß sich die Gleitlinie genau bis zu diesem Punkte ausbreitet. Den strengen Beweis werden wir später bringen. Daß sich die Gleitlinie nicht weiter ausbreitet, ist offenbar, da die Schubspannung über diesen Punkt hinaus den Wert k nicht erreicht. Man könnte aber denken, daß das Fortschreiten der Gleitlinie schon vor diesem Punkt haltmacht und hier eben auch ein labiler Spannungszustand bestehen bleibt. Wir werden später zeigen, daß dies nicht der Fall ist, da dann das Gefälle und mit demselben die Schubspannung im Endpunkt unendlich wird und deshalb die Störung des Gleichgewichtes weiter fortschreiten muß. Wir gelangen so zu einer Erklärung für das plötzliche Erscheinen der Gleitlinien.

Durch das plötzliche Auftreten einer Gleitlinie wird das Gleichgewicht des ganzen Körpers gestört. Wir betrachten zwei extreme Fälle.

Einmal halten wir den Verdrehungswinkel fest. Im Membrangleichnis bedeutet dies, daß der Druck unter der Membrane konstant gehalten wird. Durch das Auftreten einer Gleitlinie, was durch das Aufdrücken einer Erzeugenden der Böschungsfläche veranschaulicht wird, wird das Volumen unter der Membrane, also auch das mit demselben proportionale Drillungsmoment, verringert. Das Auftreten einer Gleitlinie entlastet daher plötzlich den Körper.

Das andere Mal halten wir das Drillungsmoment, also das Volumen, unter der Membrane konstant. Wird eine Erzeugende der Böschungsfläche auf die Membrane gedrückt, so muß das verdrängte Volumen anderswo Platz finden. Die Spannungen werden an anderen Stellen erhöht, das Gleichgewicht hört hierdurch auch an anderen Stellen auf. Es entstehen neue Gleitlinien, neue Erzeugende werden auf die Membrane gedrückt, der Druck unter der Membrane steigt, der Verdrehungswinkel nimmt zu, der Körper fließt.

[2]) Nádai, A.: Der bildsame Zustand der Werkstoffe, Berlin 1927. — MacGregor, C. W.: Recent Investigations in Plastic Torsion. Journal of Applied Mechanics. 4 (1937), p. A—163.

Die Erscheinung des Fließens von verdrehten Stäben, die bei Versuchen gut beobachtbar ist, hat so eine natürliche Erklärung gefunden und ist mit der Bildung von Fließschichten in einen engen Zusammenhang gebracht worden.

Kehren wir zum ersten Belastungsfalle zurück. Wird der Körper weiter verdreht, so treten auch hier weitere Gleitlinien auf. Da die bereits vorhandenen auf ihre Umgebung entlastend wirken, treten die neuen immer womöglich entfernt von den schon vorhandenen auf. Ist das System der Gleitlinien schon genügend dicht, so treten die neuen Gleitlinien immer in der Mitte zwischen zwei vorhandenen auf. Die Gleitlinien zeigen ein Bestreben, sich äquidistant zu verteilen. Für den Kreisquerschnitt muß demnach die Anzahl der Gleitlinien eine Potenz von zwei sein.

Bei fortschreitender Verdrehung wird das System der Fließschichten, das Skelett von Erzeugenden immer dichter, der Spannungszustand nähert sich asymptotisch dem aus der Plastizitätstheorie berechneten Spannungszustande.

Bei der zweiten Belastungsart erfolgt die Verdrehung in Sprüngen, sonst verläuft alles ebenso wie bei der ersten Belastungsart.

3. Berechnung der Spannungen. Wir setzen die Lage der Gleitlinien und den Verdrehungswinkel ϑ des Stabes von der Länge eins als bekannt voraus und stellen die Aufgabe, hieraus die Spannungen zu berechnen. Bezeichnet $F(x,y)$ die Ausweichung der Membrane, so genügt sie im rein elastischen Gebiete der Differentialgleichung

$$\Delta^2 F = -2\,G\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

mit der Randbedingung $F=0$ am Querschnittsumriß. In den Fließschichten ist überall $\tau = k$, also berechnet sich daselbst $F = k\,s$, wo s die Bogenlänge der Gleitlinie, von dem Umriß an gerechnet, bezeichnen soll. Könnte die elastische Spannung unbegrenzt erhöht werden, so hätten wir auch bei der Verdrehung ϑ einen rein elastischen Spannungszustand: die Ausweichung der Membrane, die mit Hilfe bekannter Methoden der Elastizitätstheorie berechnet werden kann, würde dann $F^*(x,y)$ betragen. F^* genügt im Inneren des ganzen Querschnittes der Gleichung

$$\Delta^2 F^* = -2\,G\,\vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3),$$

am Querschnittsumriß der Randbedingung $F^* = 0$.

Setzen wir

$$F = F^* - u \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4),$$

so genügt u der Laplaceschen Gleichung

$$\Delta^2 u = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5),$$

erfüllt am Querschnittsumfang die Randbedingung $u=0$ und in den Gleitlinien die Randbedingung

$$u = F^* - k\,s \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Unsere Aufgabe ist auf ein Problem des logarithmischen Potentials zurückgeführt. Es steht uns frei, die Gleitlinien mit zum Rande zu rechnen, oder sie als Unstetigkeitsstellen zu betrachten. Wir wollen letzteres tun.

Bei der Membrane verhält sich F in der Gleitlinie stetig. Bezeichnet n die Normale zur Gleitlinie, so weist $\dfrac{\partial F}{\partial n}$ da einen Sprung auf. Dasselbe gilt für u. Wir schließen hieraus, daß in den Gleitlinien eine einfache Belegung ν angenommen werden muß. An allen anderen Stellen verhält sich die Potentialfunktion regulär.

Für die nun folgende Untersuchung setzen wir die Greensche Funktion $K(x,y;\xi,\eta)$ als bekannt voraus. Wäre auch die Größe der Belegung in den Gleitlinien bekannt, so könnte man

$$u(x,y) = \int_c \nu(\xi,\eta)\,K(x,y;\xi,\eta)\,ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

berechnen, wo die Integration bei konstantem x und y über alle Gleitlinien auf die Variablen $\xi(s)$, $\eta(s)$ zu erstrecken ist. Da entlang der Gleitlinien der Wert von u aus (6) bekannt ist, läßt sich für die Belegungsdichte die Integralgleichung erster Art

$$F^* - k\,s = \int_c \nu\,K\,ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (8)$$

anschreiben. Nach der Berechnung von ν aus dieser Gleichung ergibt sich aus (7) und (4) die Gleichung der Membrane

$$F = F^* - \int_c \nu\,K\,ds \quad \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

und weiter die Schubspannungskomponenten

$$\left.\begin{aligned}\tau_x &= \frac{\partial F}{\partial y} = \tau_x^* - \int \nu \frac{\partial K}{\partial y}\, d s \\ \tau_y &= -\frac{\partial F}{\partial x} = \tau_y^* + \int \nu \frac{\partial K}{\partial x}\, d s\end{aligned}\right\} \quad \text{. . . . . (10)}$$

mit Integralen, die im Stetigkeitsbereich gewiß konvergent sind. Die mit einem Stern bezeichneten Größen beziehen sich auf den fiktiven ideal elastischen Zustand mit dem Verdrehungswinkel ϑ.

Die Berechnung des Spannungszustandes ist also auf die Bestimmung der Greenschen Funktion und auf die Lösung von Integralgleichungen erster Art zurückgeführt.

4. Die Gleitlinien. Wir wollen jetzt den Sprung, den die Spannung und die Verschiebung an den Gleitlinien erleiden, berechnen. Wir rechnen jetzt die Gleitlinien mit zum Rande und bezeichnen ihre beiden Seiten mit 1 und 2. Bezeichnet ferner n die innere Normale, so ist, da $\frac{\partial F^*}{\partial n_1} + \frac{\partial F^*}{\partial n_2} = 0$

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2}\right) = \frac{\partial F}{\partial n_1} + \frac{\partial F}{\partial n_2} = +\nu \quad \text{. . . . . (11),}$$

oder, da

$$\frac{\partial F}{\partial n_1} = -\tau_{s_1}$$

$$\tau_{s_1} + \tau_{s_2} = -\nu \quad \text{. . . . . (12).}$$

Sinngemäß ist der positive Sinn von s_1 und s_2 auf den beiden Seiten der Gleitlinien einander entgegengesetzt.

Die Normalkomponente von τ beträgt laut unseren Annahmen

$$\tau_{n_1} = -\tau_{n_2} = k \quad \text{. . . . . (13).}$$

Es darf uns nicht befremden, daß der Absolutwert von τ an der Gleitlinie größer als k ausfällt. Es herrscht da ebenso ein labiles Gleichgewicht, wie wir am Querschnittsumfang angenommen haben.

Zur Berechnung der Verschiebung in den Gleitebenen erinnern wir uns, daß die Verwölbung des Querschnittes durch die zu

$$\psi = \frac{F}{G\vartheta} + \frac{r^2}{2} \quad \text{. . . . . (14)}$$

konjugierte Funktion φ angegeben wird. $\varphi_2 - \varphi_1$ ergibt dann die relative Verschiebung in der Gleitebene und kann durch Integration von $\frac{\partial \varphi}{\partial s} = -\frac{\partial \psi}{\partial n}$ entlang der Gleitlinien um den Endpunkt herum erhalten werden, da am Endpunkt der Gleitlinie $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Aus (14) folgt mit Rücksicht auf (4)

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{1}{G\vartheta}\left(\frac{\partial F^*}{\partial n} - \frac{\partial u}{\partial n}\right) + \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{r^2}{2}\right).$$

Bei der Integration fallen die stetigen Glieder aus der Differenz $\varphi_2 - \varphi_1$ heraus, und es bleibt

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \int_s^l \frac{\partial \varphi}{\partial s}\, d s = \frac{1}{G\vartheta}\int_s^l \left(\frac{\partial u}{\partial n_1} + \frac{\partial u}{\partial n_2}\right) d s,$$

wo im zweiten Integral nur mehr einfach bis zum Endpunkt zu integrieren ist. Beachtet man (11), so folgt weiter für die relative Verschiebung in der Gleitebene

$$\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{1}{G\vartheta}\int_s^l \nu\, d s = \frac{1}{G\vartheta}\int_l^s \nu\, d s \quad \text{. . . . . (15),}$$

die also zum Integral über ν proportional ist.

Die Kraft, die von der Membrane auf die Erzeugende der Böschungsfläche ausgeübt wird, beträgt, auf die Längeneinheit bezogen,

$$q = S\left(\frac{\partial F}{\partial n_1} + \frac{\partial F}{\partial n_2}\right) = \nu S \quad \text{. . . . . (16),}$$

wo S die auf die Längeneinheit bezogene Spannung der Membrane ist.

5. Der Endpunkt der Gleitlinien. Wir sind noch den Beweis schuldig, daß jede einzelne Gleitlinie bis zum Punkte fortschreitet, bis zu welchem die Erzeugende der Böschungsfläche die im Membrangleichnis die Gleitlinie veranschaulicht, sich der Membrane anschmiegt. Wir werden zeigen, daß das Fortschreiten vorher nicht zum Stillstand kommen kann, da sonst das Gefälle der Membrane, also die Spannung, im Endpunkt unendlich wäre.

Im Punkte, bis zu welchem sich die Erzeugende der Böschungsfläche der Membrane anschmiegt, ist, ebenso wie am Querschnittsumfang, $q=0$, $\frac{\partial F}{\partial n_1}+\frac{\partial F}{\partial n_2}=0$ und daher auch $\nu=0$. In den Punkten, in denen die Erzeugende die Membrane niederdrückt, ist $q>0$, also auch $\nu>0$.

Wir untersuchen nun, wie sich die Membrane in der Umgebung des Endpunktes einer Gleitlinie verhält, für welche mit Ausnahme des Querschnittumfanges $\nu>0$ ist. Zu diesem Zwecke legen wir den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Endpunkt der Gleitlinie, die positive x-Achse in die Gleitlinie. Aus $u=\Sigma\int\limits_0^l \nu K\,d s$, wo die Summe über alle Gleitlinien zu erstrecken ist, berechnen wir $\frac{\partial u}{\partial x}=\sum\int\limits_0^l \nu\frac{\partial K}{\partial x}\,d s$, was für die Punkte außerhalb der Gleitlinien zulässig ist. Wir zeigen nun, daß diese Größe über alle Grenzen wächst, wenn x von den negativen Werten der x-Achse her dem Anfangspunkte zustrebt. Für K können wir

$$K=\frac{-1}{2\pi}\log r+\gamma(x,y;\xi,\eta)$$

schreiben, wo $r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$ und γ mit allen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung stetig sind. Für genügend kleine Werte von x sind mit Ausnahme des untersuchten Integrals alle Integrale der Summe gleichmäßig beschränkt. Das Integral, welches sich auf die untersuchte Gleitlinie bezieht, beträgt $\int\limits_0^l \nu(\xi)\left[\frac{1}{2\pi|x-\xi|}+\frac{\partial\gamma}{\partial x}\right]d\xi$. Das Integral über das erste Glied zerlegen wir in eine Summe $\int\limits_0^l=\int\limits_0^\varepsilon+\int\limits_\varepsilon^l$. Wegen $\nu(0)>0$ und der Stetigkeit von ν kann man immer ein ε finden, so daß für $\xi<\varepsilon$ $\nu(\xi)>m>0$ ist. Der zweite Summand ist gleichmäßig beschränkt, für den ersten ergibt sich

$$\int\limits_0^\varepsilon \nu(\xi)\frac{d\xi}{2\pi|x-\xi|}>\frac{m}{2\pi}\int\limits_0^\varepsilon\frac{d\xi}{|x-\xi|}=\frac{m}{2\pi}\log\frac{|x-\varepsilon|}{|x|}.$$

Läßt man x dem Werte Null zustreben, so strebt dieses Integral und damit $\frac{\partial u}{\partial x}$, welches davon nur um gleichmäßig beschränkte Glieder verschieden ist, dem Unendlichen zu.

6. Die Gestalt der Gleitlinien. Wir machten die Annahme, daß die Gleitflächen Ebenen sind, welche je eine Erzeugende der Böschungsfläche des Sandhaufengleichnisses enthalten. Mit Hilfe des Castiglianoschen Prinzips läßt sich eine Gleichung herleiten, welche an den Gleitlinien erfüllt sein muß.

Sind auf einem Teil der Oberfläche eines Körpers die Spannungen, auf einem anderen Teil die Verschiebungen gegeben, so sagt das Castiglianosche Prinzip aus, daß im Falle des Gleichgewichtes die Ergänzungsarbeit

$$A^*=A-\iint\limits_S(u\,\Xi+v\,H+w\,Z)\,d o \quad \ldots \ldots \quad (17)$$

ein Minimum wird. Es bezeichnet hier A die gesamte Formänderungsarbeit des Körpers, u, v, w die Verschiebungskomponenten, Ξ, H, Z die Komponenten der auf die Oberfläche wirkenden Spannung, $d o$ das Oberflächenelement. Die Integration ist nur auf jenen Teil der Oberfläche auszudehnen, wo die Verschiebungen gegeben sind. Bei der Variation sind nur solche Spannungszustände zugelassen, welche die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen und an den Teilen der Oberfläche, wo die Spannungen gegeben sind, mit diesen im Gleichgewicht sind.

Beachten wir, daß im Falle eines verdrehten Stabes die Spannungen auf der Mantelfläche und in den Gleitflächen vorgeschrieben sind, daß für die Länge eins die Formänderungsarbeit

$$A = \frac{1}{2\,G}\iint\limits_S (F_x^2 + F_y^2)\,d\,x\,d\,y,$$

und daß im zweiten Glied von (17), wenn wir den Stab an dem einen Ende eingespannt denken, am anderen Ende $\Xi = F_y$, $H = -F_x$, $Z = 0$, $u = -\vartheta\,y$, $v = \vartheta\,x$ ist, so erhalten wir nach partieller Integration und Berücksichtigung der Randbedingung $F = 0$

$$A^* = \frac{1}{G}\iint\limits_S \left(\frac{F_x^2 + F_y^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right) d\,x\,d\,y,$$

wo die Integration sich auf den ganzen Querschnitt zu erstrecken hat. Im Gleichgewicht soll A^* ein Minimum haben, also

$$G\,\delta\,A^* = \delta\iint\limits_S \left(\frac{F_x^2 + F_y^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right) d\,x\,d\,y = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (18)$$

sein, wobei für alle zum Vergleich herangezogene Funktionen am Querschnittsumfang $F = 0$, in den Gleitebenen $F = k\,s$ ist. Diese Randbedingungen führen auf der Oberfläche zur Spannung Null, in den Gleitflächen zur Grenzspannung k.

Wir gehen nun zur Berechnung der Variation (18) über. Bei dieser Variation ist, da wir die Gleitlinien mit zum Rande rechnen, außer F auch der Rand zu variieren. Es wird daher

$$G\,\delta\,A^* = \iint\limits_S \delta\left(\frac{F_x^2 + F_y^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right) d\,x\,d\,y + \iint\limits_{\delta S}\left(\frac{F_x^2 + F_y^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right) d\,x\,d\,y = 0 \quad . \; . \quad (19).$$

Im ersten Glied erstreckt sich die Variation nicht mehr auf den Rand. Im zweiten Glied haben wir die von der Variation des Randes herrührende Variation besonders angeschrieben. Das erste Glied ergibt bekanntlich, wenn wir den Rand mit R bezeichnen,

$$-\iint\limits_S (F_{xx} + F_{yy} + 2\,G\,\vartheta)\,\delta\,F\,d\,x\,d\,y + \int\limits_R \delta\,F\cdot(F_x\,d\,y - F_y\,d\,x) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (20),$$

im zweiten können wir die Integration nach der Normale ausführen, indem wir bedenken, daß wir die Unstetigkeiten der Ableitung von F zum Rande gerechnet haben, also F stetig differenzierbar ist. Wir führen Koordinaten $d\,s$ und $d\,n$ ein, wo $d\,s$ das im positiven Umlaufsinn gerechnete Bogenelement, $d\,n$ das Element der inneren Normale bedeutet. An die Stelle des Flächenelementes $d\,x\,d\,y$ tritt so $-d\,s\,d\,n$, und es folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit von F_x, F_y, F

$$-\int\limits_R \left(\frac{F_x^2 + F_y^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right)\delta\,n\,d\,s \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (21).$$

In den Randgliedern drücken wir alles durch s und n aus. Bezeichnet φ den Winkel, den die in die positive Umlaufrichtung weisende Tangente des Randes mit der x-Achse einschließt, so ist in (20)

$$F_x\,d\,y - F_y\,d\,x = (F_x \sin\varphi - F_y \cos\varphi)\,d\,s = -F_n\,d\,s.$$

Da der Betrag des Gradienten von F gegenüber der Drehung des Koordinatensystems invariant ist, läßt sich in (21) für $F_x^2 + F_y^2$ $F_s^2 + F_n^2$ schreiben. Wir erhalten also aus (19), (20), (21) endlich

$$G\,\delta\,A^* = -\iint\limits_S (\Delta\,F + 2\,G\,\vartheta)\,\delta\,F\,d\,x\,d\,y - \int\limits_R F_n\,\delta\,F\,d\,s - \int\limits_R \left(\frac{F_s^2 + F_n^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right)\delta\,n\,d\,s = 0\,^{3)} \quad (22).$$

Wegen (1) ist das erste Glied Null. Zerlegen wir den Rand R in den Umfang U und in die einzelnen Gleitlinien, so verschwinden alle Glieder, die sich auf den Umfang beziehen, da dort $\delta\,F = 0$, $\delta\,n = 0$. Das Randintegral zerfällt in Glieder, die sich aus den einzelnen Gleitlinien ergeben. Diese sind voneinander unabhängig, müssen daher einzeln verschwinden. Wir fassen eine dieser Gleichungen näher ins Auge. Sie lautet

$$\int \left[F_n\,\delta\,F + \left(\frac{F_s^2 + F_n^2}{2} - 2\,G\,\vartheta\,F\right)\delta\,n\right] d\,s = 0 \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (23),$$

[3]) Die Herleitung einer Formel, von der (22) einen Spezialfall darstellt, ist bei Ch. Jordan, Cours d'Analyse Mathématique, 3. ed. t. III, p. 550—555 zu finden.

wo die Integration doppelt, einmal vom Rand in das Innere des Querschnittes mit dem Zeiger 1 und dann wieder zurück mit dem Zeiger 2 auszuführen ist. Kehrt man den Sinn der zweiten Integration um, so können beide Integrale vereinigt werden. Man erhält so mit $\delta n = \delta n_1 = -\delta n_2$

$$\int_0^l \left(F_{n1}\,\delta F_1 + F_{n2}\,\delta F_2 + \frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2}\,\delta n\right) d s = 0 \quad \ldots \ldots \quad (24),$$

da F und folglich auch F_s^2 auf beiden Seiten der Gleitlinie denselben Wert hat. Die Integration ist auf die Länge l der Gleitlinie auszudehnen.

Entlang der Gleitlinien besteht die Nebenbedingung $F - k s = 0$. Denken wir uns alle Größen durch einen Parameter t ausgedrückt, welcher für $s = 0$ gleich Null ist, so können wir $F - k \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2}\, d t = 0$ schreiben, wo die Striche die Derivation nach t bezeichnen. Die Variation dieser Gleichung ergibt

$$\delta F + F_x\,\delta x + F_y\,\delta y - k \int_0^t \frac{x'\,\delta x' + y'\,\delta y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}\, d t = 0 \quad \ldots \ldots \quad (25).$$

Das letzte Glied läßt sich durch partielle Integration umformen. Man erhält

$$k \left\{ \frac{x'\,\delta x + y'\,\delta y}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \Bigg|_0^t - \int_0^t \frac{x' y'' - y' x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} (y'\,\delta x - x'\,\delta y)\, d t \right\}.$$

Das erste Glied verschwindet an der unteren Grenze, da dort $\delta x = \delta y = 0$. Den Vektor mit den Komponenten δx, δy können wir durch die Komponenten δs, δn ausdrücken. Bezeichnet ϱ das Krümmungsmaß der Gleitlinie, positiv, wenn der Krümmungsmittelpunkt auf der Seite der positiven n liegt, so erhält man aus (25)

$$\delta F_1 = (k - F_s)\,\delta s - F_{n1}\,\delta n - k \int_0^s \varrho\,\delta n\, d\sigma \quad \ldots \ldots \quad (26a),$$

wo die Bogenlänge als Integrationsvariable mit σ bezeichnet wurde. Für die andere Seite gilt

$$\delta F_2 = (k - F_s)\,\delta s + F_{n2}\,\delta n - k \int_0^s \varrho\,\delta n\, d\sigma \quad \ldots \ldots \quad (26b).$$

Diese Werte in (24) eingesetzt erhält man

$$\int_0^l \left[(k - F_s)(F_{n1} + F_{n2})\,\delta s - \frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2}\,\delta n - k (F_{n1} + F_{n2}) \int_0^s \varrho(\sigma)\,\delta n\, d\sigma \right] d s = 0 \quad . \quad . \quad (27).$$

Ist die Gleitlinie, wie wir bisher angenommen haben, gerade, so folgt wegen $\varrho = 0$, $F_s = k$ und $\nu = F_{n1} + F_{n2} \neq 0$

$$F_{n1} = F_{n2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Im Falle, daß $\varrho \neq 0$, definieren wir die Hilfsgröße $\delta\omega = \int_0^s \varrho\,\delta n\, d\sigma$ und erhalten aus (27) mit Rücksicht auf $\delta n = \frac{1}{\varrho} \frac{d}{d s}\,\delta\omega$

$$\int_0^l \left[\frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2\varrho} \frac{d}{d s}\,\delta\omega + k (F_{n1} + F_{n2})\,\delta\omega \right] d s = 0 \quad \ldots \ldots \quad (29).$$

Durch partielle Integration folgt hieraus

$$\frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2\varrho}\,\delta\omega \Bigg|_0^l - \int_0^l \left[\frac{d}{d s} \frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2\varrho} - k (F_{n1} + F_{n2}) \right] \delta\omega\, d s = 0 .$$

Das erste Glied verschwindet, da an der unteren Grenze $\delta\omega = 0$ und an der oberen $F_{n1} + F_{n2} = 0$ ist. Weiter folgt

$$\frac{d}{d s} \frac{F_{n1}^2 - F_{n2}^2}{2\varrho} = k (F_{n1} + F_{n2}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (30).$$

An den Nullstellen von ϱ kann mit ϱ nicht dividiert werden. An diesen Stellen muß jedoch auch $\frac{d}{ds}\delta\omega$ von derselben Größenordnung Null sein wie ϱ, da δn beschränkt ist. Bei der Herleitung des Fundamentallemas der Variationsrechnung nimmt man für $\delta\omega$ Funktionen an, für welche dies keine Einschränkung bedeutet, so daß Gl. (30) auch dann gültig ist, wenn ϱ getrennte Nullstellen hat.

Laut Gl. (30) sind gekrümmte Gleitflächen wohl möglich. Entweder ist also die an sich naheliegende Annahme gerader Gleitlinien falsch, oder ist die Anwendung des Castiglianoschen Prinzipes nicht gestattet, da es sich hier nicht um einen Gleichgewichtszustand handelt, sondern um die Ausbreitung einer Gleichgewichtsstörung. Zur Entscheidung sind weitere Untersuchungen notwendig.

6. Numerisches Beispiel. Wir betrachten den verdrehten Rundstab im Augenblick, wenn die Entwicklung der ersten Gleitfläche zum Stillstand gekommen ist.

Den Halbmesser des Kreisquerschnittes können wir gleich eins annehmen und erhalten dann

$$F^* = \frac{G\vartheta}{2}(1-r^2)\,.$$

In den Gleitlinien ist $s = 1 - r$. Aus (6) folgt

$$u = F^* - k\,s = \frac{G\vartheta}{2}(1-r^2) - k(1-r) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (31).$$

Für den Kreis ist die Greensche Funktion in komplexer Schreibweise bekanntlich

$$K = \frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1-\bar{z}z'}{z-z'}\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (32),$$

wo $z = x + iy$, $z' = \xi + i\eta$. Legen wir die x-Achse in die Gleitlinie, so haben wir aus (8) zur Bestimmung von ν die Integralgleichung

$$\frac{G\vartheta}{2}(1-x^2) - k(1-x) = \int_a^1 \nu(\xi)\,\frac{1}{2\pi}\log\left|\frac{1-\xi x}{\xi - x}\right| d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (33).$$

Die Integration ist bis zum Werte a auszudehnen, für den $\nu(a) = 0$.

Will man bei vorgegebenen Werten von ϑ, G, k den Wert von a berechnen, so kann man derart verfahren, daß man die Integralgleichung (33) für verschiedene, willkürlich angenommene Werte von a löst. Für jedes a erhält man eine Belegungsfunktion $\nu_a(x)$. Die Lösung der Gleichung $\nu_a(a) = 0$ durch Interpolation liefert den gesuchten Wert von a.

Da es sich hier nur um ein Beispiel handelt, schlagen wir einen anderen, indirekten, aber weniger mühsamen Weg ein. Wir wissen, daß ν für die beiden Endpunkte der Gleitlinie verschwindet und setzen

$$\nu(\xi) = C(1-\xi)(\xi - a) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (34)$$

mit einer Konstanten C. Nehmen wir a willkürlich an, so können wir ϑ, G, k so berechnen, daß die beiden Seiten von (33) je weniger voneinander abweichen.

Für $a = 0{,}2$ wurden die Werte von

$$I = \int_a^1 (1-\xi)(\xi - a)\,{}^{10}\!\log\left|\frac{1-\xi x}{\xi - x}\right| d\xi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (35)$$

berechnet und in die zweite Spalte von Tabelle 1 eingetragen. Mit diesen Werten wird

$$\frac{G\vartheta}{2k}(1-x^2) - (1-x) = \frac{C\,I}{2\pi k M} = C'\,I \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36),$$

wo C' eine neue Konstante und $M = {}^{10}\log e$ ist. Wir bestimmen nun die Konstanten $\frac{G\vartheta}{2k}$ und C' mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate so, daß (36) womöglich genau erfüllt sei. Es ergibt sich $\frac{G\vartheta}{2k} = 0{,}94$ und $C' = 3{,}1062$. Wird noch $k = 2000\,\mathrm{kg/cm^2}$, $G = 800000\,\mathrm{kg/cm^2}$

angenommen, so hat man $\vartheta = 0{,}0047$, ferner $C = 16950$. Mit diesen Werten wurden die Werte von u, F^*, F in Tabelle 1 berechnet. Wegen der Symmetrie ist $\tau_s = \frac{\nu}{2}$. Diese Werte sind in die vorletzte Spalte eingetragen. Die letzte Spalte enthält $\tau = (\tau_n{}^2 + \tau_s{}^2)^{1/2}$. Der größte Wert von τ beträgt 2420 kg/cm² in der Mitte der Gleitlinie, 3700 kg/cm² am Querschnittsumfang.

An Hand von Tabelle 1 läßt sich unser quadratischer Ansatz für ν prüfen. Zwischen $x = 0{,}2$ und $x = 1{,}0$ sollte der Unterschied zweier benachbarter F-Werte 200 betragen. In der Tabelle finden wir zwischen $x = 0{,}2$ und 0,3 den Unterschied 177,9, also eine Abweichung von 11 v. H. Bei der rohen Annäherung von ν ist die Übereinstimmung noch befriedigend.

Die Kenntnis von ν ermöglicht die Berechnung von u, F^*, F für beliebige Stellen. Einige Werte wurden für die y-Achse mit Hilfe der Simpsonschen Regel berechnet und in Tabelle 2 zusammengestellt. In der letzten Spalte sind auch die x-Komponenten von τ berechnet.

Tabelle 1.

x	I	u	F^*	F	τ_n	τ_s	τ
— 1,0	0,0000	0,0	0,0	0,0	3700		
— 0,9	0,0010	6,2	357,2	351,0	3320		
— 0,8	0,0022	13,7	676,8	663,1	2930		
— 0,7	0,0035	21,7	958,8	937,1	2550		
— 0,6	0,0049	30,4	1203,2	1172,8	2160		
— 0,5	0,0066	41,0	1410,0	1369,0	1770		
— 0,4	0,0085	52,8	1579,2	1526,4	1370		
— 0,3	0,0108	67,1	1710,8	1643,7	970		
— 0,2	0,0134	83,2	1804,8	1721,6	570		
— 0,1	0,0167	103,7	1861,2	1757,5	150		
0,0	0,0208	129,2	1880,0	1750,8	— 300		
0,1	0,0262	162,8	1861,2	1698,4	— 800		
0,2	0,0344	213,7	1804,8	1591,1	— 2000	0	2000
0,3	0,0479	297,6	1710,8	1413,2	— 2000	590	2090
0,4	0,0597	370,9	1579,2	1208,3	— 2000	1020	2250
0,5	0,0664	412,5	1410,0	997,5	— 2000	1270	2370
0,6	0,0663	411,9	1203,2	791,3	— 2000	1360	2420
0,7	0,0588	365,3	958,8	593,5	— 2000	1270	2370
0,8	0,0443	275,2	676,8	401,6	— 2000	1020	2250
0,9	0,0239	148,5	357,2	208,7	— 2000	590	2090
1,0	0,0000	0,0	0,0	0,0	— 2000	0	2000

Tabelle 2.

y	u	F^*	F	τ_x
0,0	128,9	1880,0	1751,1	0
0,1	125,1	1861,2	1736,1	310
0,2	114,8	1804,8	1690,0	630
0,3	100,5	1710,8	1610,3	980
0,4	84,6	1579,2	1494,6	1340
0,5	68,3	1410,0	1341,7	1720
0,6	52,5	1203,2	1150,7	2100
0,7	37,7	958,8	921,1	2490
0,8	23,9	676,8	652,9	2880
0,9	11,4	357,2	345,8	3260
1,0	0,0	0,0	0,0	3650

Abb. 1.

Auf Grund der Daten von Tabelle 1 und 2 wurde in der Abbildung F mit Hilfe seiner Schichtenlinien roh dargestellt. Zur genaueren Darstellung müßte man von einer genaueren Berechnung von ν ausgehen und F auch für Werte außerhalb der Koordinatenachsen berechnen, was keine prinzipielle Schwierigkeiten verursacht, aber einen beträchtlichen Mehraufwand an Rechenarbeit fordert.

8. Verallgemeinerungen. Wir wollen unsere Ergebnisse verallgemeinern. Bei dieser Verallgemeinerung verlassen wir das Gebiet des exakt Bewiesenen und begeben uns auf das Gebiet der Vermutungen. Diese Vermutungen haben den Charakter einer Interpolation zwischen den Ergebnissen unserer Berechnungen für den speziellen Belastungsfall eines idealisierten Körpers und den experimentellen Beobachtungen.

Das wichtigste Ergebnis unserer Betrachtungen ist die Erkenntnis, daß *die Abnahme der Spannung bei zunehmender Formänderung zur Entstehung von Gleitlinien führt*. Eine Abweichung von den Eigenschaften unseres idealisierten Körpers kann wohl Änderungen in der Spannungsverteilung gegenüber der berechneten hervorrufen, die Entstehung der Gleitlinien erfolgt aber genau in derselben Weise wie beim idealisierten Körper. Die Stelle mit der größten Schubspannuug befindet sich im rein elastischen Zustand in den meisten — wenn nicht in allen — Belastungsfällen auf der Oberfläche des Körpers. Durch die Abnahme der Spannung in der Nähe dieser Stelle setzt die Bildung einer Gleitfläche ein, die sich infolge der Kerbwirkung ihres Randes plötzlich ausbreitet. Durch die hierdurch hervorgerufene Entlastung entstehen weitere Gleitflächen, die das Bestreben haben, sich äquidistant zu verteilen. Es hat also einen Sinn, von der Dichte der Gleitflächen zu sprechen, die jedoch nicht räumlich konstant sein muß. Die durch das Auftreten der Gleitlinien hervorgerufene Entlastung zeigt sich im Formänderungs-Belastungsdiagramm als eine Unregelmäßigkeit an der Fließgrenze.

Die plastische Formänderung, in die Gleitflächen konzentriert, geht mit einer Verfestigung einher. Wir finden statt Gleitflächen Fließschichten. Mit fortschreitender Formänderung werden diese Fließschichten immer dicker, da immer weitere benachbarte, noch unverfestigte Schichten ins Fließen geraten, bis sich der ganze Körper im plastischen Zustand befindet.

Die Behauptung, daß die Abnahme der Spannung bei zunehmender Formänderung zur Entstehung von Gleitflächen führt, kann nicht ohne weiteres umgekehrt werden: man kann aus dem Auftreten von Gleitflächen nicht auf das Vorhandensein einer oberen und unteren Fließgrenze schließen, da es wohl vorstellbar ist, daß auch andere Ursachen zur Bildung von Gleitflächen führen können.

Auf den homogenen Spannungszustand können unsere Betrachtungen nicht unmittelbar angewandt werden. Auch können wir ihn praktisch nie ganz genau verwirklichen. Sind aber Abweichungen vom ideal homogenen Spannungszustand vorhanden, mögen sie noch so klein sein, so besteht keine Schwierigkeit mehr. Der homogene Spannungszustand erscheint hier als eine Entartung des allgemeinen, der nur durch einen Grenzübergang erfaßt werden kann. Dies ist wohl der Grund, weshalb alle Bemühungen, die *Lüders-Hartmann*schen Linien vom homogenen Spannungszustand ausgehend zu erklären, scheitern mußten.

Eine Verallgemeinerung ganz anderer Art ist die Anwendung unserer Gedankengänge auf Kristalle. Das Gleiten erfolgt bei Kristallen in Gleitebenen, die durch niedrige Indizes ausgezeichnet sind. Die Gleitspannung ist beim Gleiten in einer solchen Gleitebene eines idealen Kristalles eine periodische Funktion des Gleitweges, deren Periode gleich der Elementardistanz des Gitters in der Gleitrichtung ist. Infolge der Periodizität muß die Spannung in bestimmten Abschnitten der Formänderung abnehmen, ja, sogar das Vorzeichen ändern.

Die Umstände, die in isotropen Körpern zur Bildung von Gleitflächen führen, sind also vorhanden. Da es sich hier um Dimensionen der Gitterkonstante handelt, können die Gleitebenen auch von den inneren Oberflächen der Gitterfehlstellen, die laut den experimentellen Beobachtungen immer vorhanden sind, ausgehen. Es besteht aber gegenüber den isotropen Körpern ein grundlegender Unterschied: bei den Kristallen sind die Gleitflächen Ebenen, die nicht nur durch den Spannungszustand, sondern auch durch die Struktur des Kristalls bestimmt sind. Von den Gleitebenen sind jene wirksam, in denen die Schubspannung einen nur von der Orientierung der Gleitebene und der Gleitrichtung abhängigen, also vom Spannungszustand unabhängigen kritischen Wert überschreitet. Im allgemeinen sind die Gleitebenen Ebenen mit der kleinsten kritischen Schubspannung. Die Kleinheit der kritischen Schubspannung in den Gleitebenen gibt aber keine Erklärung dafür, warum von den parallelen Ebenen mit derselben kritischen Schubspannung nur einzelne als Gleitebenen wirksam sind.

Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik.

Hauptversammlung in Göttingen.

Die diesjährige Hauptversammlung der Gesellschaft für angewandte Mathematik und Mechanik fand im Anschluß an die Tagung des „Fachausschusses für Strömungsforschung beim VDI" in der Zeit vom 20. bis zum 22. Oktober in Göttingen statt. Sie war später als sonst üblich gelegt worden, um den Mitgliedern der Gesellschaft, die den internationalen Mechanikkongreß in Cambridge (Mass.) besucht hatten, die Möglichkeit zu geben, auch an der Göttinger Tagung teilzunehmen und dort über die Verhandlungen des internationalen Kongresses zu berichten. Eine Übersicht über die Reise der deutschen Delegation und den allgemeinen Verlauf des Kongresses gab Herr Prandtl-Göttingen; über die einzelnen Verhandlungsgebiete referierten die Herren Tollmien-Dresden (Hydrodynamik, insbesondere Turbulenz), Schlichting-Braunschweig (Aerodynamik) und Marguerre-Adlershof (Elastizität). Kurze Inhaltsangaben der übrigen in Göttingen gehaltenen Vorträge sind, soweit sie von den Vortragenden zur Verfügung gestellt wurden, im folgenden, abgedruckt. Diese Berichte werden nebst dem im nächsten Jahrgang dieser Zeitschrift erscheinenden ausführlichen Vortragsbericht des Herrn Collatz über die Berechnung von Näherungswerten für die Eigenwerte den Mitgliedern der Gesellschaft zugehen.

Am Freitag fand vor Beginn der Vorträge unter dem Vorsitz von Herrn Prandtl die ordentliche Hauptversammlung statt, über deren Verlauf der ausführliche Jahresbericht die Mitglieder unterrichten wird.

Vorträge und Hauptversammlung waren in diesem Jahre so gut wie bisher bei keiner Tagung besucht. Zu manchen Vorträgen hatten sich fast 150 Hörer eingefunden. Ebenso war die Beteiligung an den am Freitagnachmittag stattfindenden Besichtigungen der Aerodynamischen Versuchsanstalt und des Universitätsinstitutes für angewandte Mechanik überaus stark. Es spricht unter anderem für den in jeder Weise erfreulichen Verlauf der diesjährigen Tagung, daß während der Tagung selbst mehr als 25 neue Mitgliedermeldungen beim Geschäftsführer der Gesellschaft eingingen. 905

Vorträge aus dem Gebiet der Aero- und Hydrodynamik.

Über das Messen turbulenter Längs- und Querschwankungen.

Von *H. Reichardt* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

1. Über die Bedeutung von Schwankungsmessungen. Ein tieferes Verständnis der turbulenten Strömungsbewegungen läßt sich aus den Untersuchungen der zeitlichen Mittelwerte der Strömungen allein nicht gewinnen. Ein Studium der Schwankungsvorgänge selbst ist unerläßlich. Die Turbulenzforschung ist daher in ein neues, erfolgversprechendes Stadium getreten, seitdem man begonnen hat, Schwankungsmessungen auszuführen und auf diese Messungen Theorien zu gründen.

Die bisher durchgeführten Schwankungsuntersuchungen beziehen sich fast ausschließlich auf die sogenannte isotrope Turbulenz. Sie stellt einen Abklingungsvorgang dar und ist der einfachste Typ der Turbulenz, bei der man bloß die Längsschwankungen zu messen braucht. Das wesentliche Problem der turbulenten Austauschbewegung bzw. der turbulenten Scheinreibung steckt aber gerade in der nichtisotropen Turbulenz. Für deren Untersuchung sind Messungen von Längs- und Querschwankungen erforderlich.

2. Richtungssonden für Schwankungsmessungen. Zuverlässige Messungen quadratischer Mittelwerte, wie man sie für die Schwankungsforschung braucht, sind praktisch nur mit Hitzdrähten ausführbar. Für das gleichzeitige Messen von Längs- und Querschwankungen ist jede Hitzdraht-Richtungssonde verwendbar, die sich in hinreichend geringen Abmessungen herstellen läßt.

Richtungssonden bestehen mindestens aus zwei gleichartigen Hitzdrähten, die winkelempfindlich angeordnet sind. Die Differenz der Spannungen über diesen Drähten ist ein Maß für die Winkelabweichung bzw. für die Quergeschwindigkeit v' der Strömung und die Änderung der Spannungssumme ist ein Maß für die Änderung u' der Längsgeschwindigkeit.

Bei der Anordnung von Simmons und Bailey (Abb. 1a) beruht die Richtungsempfindlichkeit der Hitzdrähte auf ihrer Schräganblasung. Bei den zwei parallelen Hitzdrähten von Burgers (in Abb. 1b im Schnitt dargestellt) ist die Richtungsempfindlichkeit durch wechselseitige Beeinflussung der Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder der Drähte bedingt.

Bei der Dreidraht-Anordnung des Verfassers (Abb. 1c) werden die Geschwindigkeits- und Temperaturgradienten im Nachlauf des vorderen (dritten) Hitzdrahtes benutzt. Der vordere Draht kann zum Messen von u', aber auch zum Messen von Temperaturschwankungen T' dienen. Es ist daher möglich, außer der turbulenten Scheinreibung $\varrho \overline{u' v'}$ auch die turbulente Wärmeübertragung $\varrho c_p \overline{T' v'}$ direkt aus den Schwankungen zu ermitteln (ϱ = Luftdichte, c_p = spezifische Wärme).

Abb. 1.

3. Allgemeine Beziehungen. Ganz unabhängig davon, in welcher Weise die Richtungsempfindlichkeit erzielt wird, gelten für Richtungssonden, die für Schwankungsmessungen Verwendung finden, folgende allgemeine Betrachtungen.

Die „wirksame Kühlgeschwindigkeit" w[1]) an einem Hitzdraht hängt ab vom Winkel a (Abb. 1) und von der Geschwindigkeit u der ungestörten Strömung. Die $w(a)$-Kurven eines Hitzdrahtes für die einzelnen Geschwindigkeiten sind symmetrisch zur Achse $a = 0$, auf der die Kleinstwerte von w liegen. Die Größtwerte von w sind im allgemeinen mit der ungestörten Geschwindigkeit u identisch.

Für Schwankungsmessungen ist die Sonde so aufzubauen, daß die Hitzdrähte feste Winkel $+a$ bzw. $-a$ mit der Hauptströmungsrichtung x bilden. Dann werden beide Hitzdrähte mit der gleichen Geschwindigkeit w angeblasen, wenn der Strömungsvektor in der x-Richtung liegt und die Anblasgeschwindigkeit u örtlich konstant ist.

Ändert die Strömung gegenüber der x-Achse ihre Richtung um den kleinen Winkel φ und ihre Stärke um Δu und besteht ein Geschwindigkeitsgefälle $\frac{\Delta u_1 - \Delta u_2}{\Delta y}$ in der y-Richtung senkrecht zu x, so hat man für die Änderungen der Kühlgeschwindigkeiten Δw_1 bzw. Δw_2 näherungsweise:

$$\Delta w_1 = \frac{\partial w}{\partial a}\varphi + \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u_1 \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

$$\Delta w_2 = -\frac{\partial w}{\partial a}\varphi + \frac{\partial w}{\partial u}\Delta u_2 \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Die Spannung E über einem Hitzdraht ist eine Funktion von w. Diese Funktion $f(w)$ hängt im einzelnen von der gewählten Schaltung ab. Allgemein ist zu sagen, daß f mit wachsendem w abnimmt bis auf den asymptotischen Wert E_0 des kalten Drahtes.

Für kleine Änderungen Δw kann man schreiben

$$E = f(w) + \frac{df}{dw}\Delta w \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

bzw. für die in der Wheatstoneschen Brücke gemessene Spannungsdifferenz

$$E_1 - E_2 = e_v = \frac{df}{dw}\left(2\frac{\partial w}{\partial a}\varphi + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{du}{dy}\Delta y\right) \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

(Δy = Abstand der Hitzdrähte.) Führt man noch die Querschwankung $v' = \varphi u$ ein und bezeichnet $\eta = w/u$, so hat man

$$e_v = b\left(v' + \varphi_0 u + c\frac{du}{dy}\right) \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

[1]) In w sind definitionsgemäß auch die Einflüsse einer veränderten Lufttemperatur mit einbegriffen.

Hier bedeutet φ_0 ein kleiner Fehlwinkel, der beim Aufstellen der Sonde sehr leicht auftreten kann und

$$b = 2 \frac{d f}{d w} \frac{\partial \eta}{\partial a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6),$$

$$c = \frac{u \frac{\partial \eta}{\partial u} + \eta}{2 \frac{\partial \eta}{\partial a}} \Delta y \sim \frac{\eta}{2 \frac{\partial \eta}{\partial a}} \Delta y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7).$$

Die Größe b ist ein Maß für die Empfindlichkeit der v'-Messung und c gibt den Einfluß des Geschwindigkeitsgradienten auf die v'-Messung wieder.

Die Größe b ist im allgemeinen geschwindigkeitsabhängig. Bei der Dreidrahtsonde läßt sich b allerdings im Bereiche kleiner Geschwindigkeiten konstant machen, da bei den kleinen Reynoldsschen Zahlen des vorderen Drahtes (von etwa 0,01 mm Ø) zwei Effekte gegeneinander arbeiten: Während $\frac{d f}{d w}$ mit wachsendem w abnimmt, vertieft sich allmählich die Geschwindigkeitsdelle hinter dem vorderen Draht, wodurch $\frac{\partial \eta}{\partial a}$ ansteigt. Bei Steigerung der Geschwindigkeit weit über 1 m/s schreitet aber die Dellenveränderung nicht mehr so stark fort und das Abklingen von $\frac{d f}{d w}$ überwiegt.

Da die turbulenten Geschwindigkeitsschwankungen nicht immer klein sind, erfordert die Geschwindigkeitsabhängigkeit von b noch eine Korrektur. Man kann näherungsweise schreiben:

$$b = b(\bar{u}) + \frac{d b}{d \bar{u}} u' \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (8),$$

wobei $\bar{u}$ die mittlere Geschwindigkeit und u' die Längsschwankung bedeutet. Nach Einführung der dimensionslosen Zahl

$$\varkappa = \frac{\bar{u}}{b} \frac{d b}{d \bar{u}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (9)$$

hat man statt (5) unter Vernachlässigung der Korrekturglieder zweiten Grades:

$$e_v / b = v' + \varphi_0 u + \varkappa \frac{u' v'}{\bar{u}} + c \frac{d u}{d y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (10).$$

4. Bildung verschiedener Mittelwerte. Im allgemeinen mißt man nicht die Brückenspannung selbst, sondern einen Strom, der von der Brückenspannung veranlaßt wird. Ist dieser Strom der Brückenspannung proportional, so sind auch die Strommittelwerte den entsprechenden Spannungsmittelwerten proportional.

Für das lineare Spannungsmittel hat man

$$\bar{e}_v / b = \varphi_0 \bar{u} + \varkappa \frac{\overline{u' v'}}{\bar{u}} + c \frac{d \bar{u}}{d y} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Diese Gleichung ist bei der experimentellen Bestimmung von c zu verwenden.

Zur Ermittlung des quadratischen Mittelwertes ist die Gleichung

$$e_v' / b = v' + \varphi_0 u' + c \frac{d u'}{d y} \varkappa \left(\frac{u' v'}{\bar{u}} - \frac{\overline{u' v'}}{\bar{u}} \right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (12)$$

zu quadrieren. Man erhält

$$\overline{e_v'^2} / b^2 = \overline{v'^2} + 2 \varphi_0 \overline{u' v'} + 2 c \frac{d}{d y} (\overline{u' v'}) + 2 \varkappa \frac{\overline{u' v'^2}}{\bar{u}} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (13).$$

Im c-Glied dieser Gleichung steckt die Annahme, daß $\overline{u' \frac{\partial w'}{\partial z}}$ wegen fehlender Korrelation verschwindet.

Existiert für die Längsschwankungen u' die Gleichung

$$e_u / a = u' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14),$$

so hat man für das gemischte Produkt $\overline{u' v'}$, das der turbulenten Scheinreibung proportional ist, gemäß (12)

$$\frac{\overline{e_u' e_v'}}{a\, b} = \overline{u' v'} + \varphi_0 \overline{u'^2} + \frac{c}{2} \frac{d\, \overline{u'^2}}{d\, y} + \varkappa \frac{\overline{u'^2 v'}}{\bar{u}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15).$$

Die Glieder mit $\varkappa$ in den Gl. (13) und (15) sind klein und verschwinden außer für $\varkappa = 0$ auch bei symmetrischer u'-v'-Verteilung.

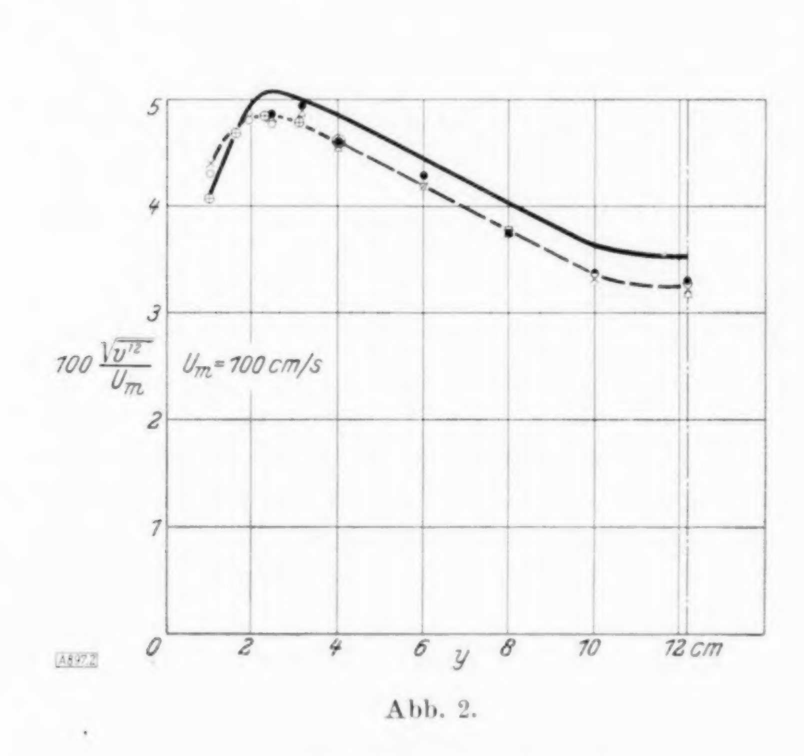


Abb. 2.

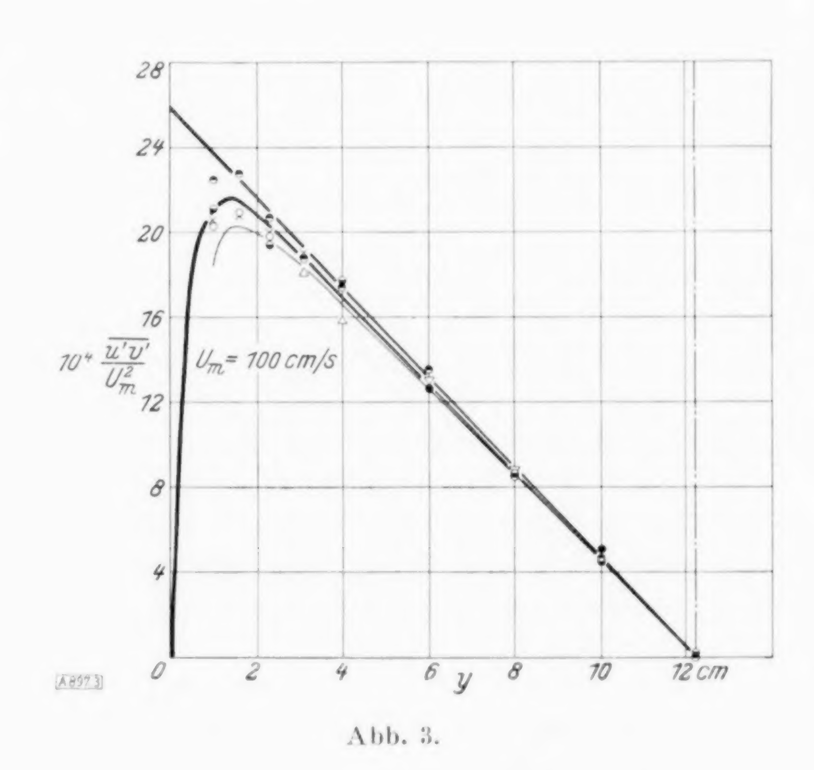


Abb. 3.

5. Beispiel. Die Abb. 2 und 3 zeigen $\sqrt{\overline{v'^2}}$- bzw. $\overline{u' v'}$-Messungen mit der Dreidrahtsonde in einer ausgebildeten turbulenten Kanalströmung als Funktionen des Wandabstandes y. Die gegenseitigen Abstände der Hitzdrähte waren von der Größenordnung 0,1 mm. Der Abstand der Kanalwände betrug 24,4 cm und die mittlere Maximalgeschwindigkeit $U_m = 100$ cm/s.

In dem vorliegenden Geschwindigkeitsbereich ist für die Dreidrahtsonde $b = \text{const}$ und somit $\varkappa = 0$. Die $\varkappa$-Glieder wären aber auch ohnehin fortgefallen, da sich die u'-v'-Verteilung als symmetrisch herausgestellt hatte[2]).

Die gestrichelte Kurve der Abb. 2 verbindet die $\sqrt{\overline{v'^2}}$-Meßpunkte. Die ausgezogene Kurve gibt die unter Berücksichtigung des c-Gliedes verbesserten $\sqrt{\overline{v'^2}}$-Werte wieder.

Die durch den Nullpunkt gehende $\overline{u' v'}$-Kurve der Abb. 3 entspricht der turbulenten Scheinreibung

$$\varrho\, \overline{u' v'} = \tau_{\text{ges}} - \mu \frac{d\, \bar{u}}{d\, y} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16).$$

Die gesamte Schubspannung τ_{ges} entspricht der durch die Punkte $y = 12{,}2$ und $10^4 \frac{\overline{u' v'}}{U_m{}^2} = 25{,}8$ gehenden Geraden. Die Lage dieser Geraden wurde aus dem Druckabfall bestimmt. Die mit der Dreidrahtsonde gewonnenen Meßpunkte liegen also im Mittel mit guter Genauigkeit auf der durch das Druckgefälle und den Geschwindigkeitsgradienten geforderten $\overline{u' v'}$-Kurve. Ohne Berücksichtigung des c-Gliedes würden die mittleren Meßwerte auf die darunter liegende schwach ausgezogene Kurve fallen. 897

[2]) H. Reichardt: Messungen turbulenter Schwankungen. Naturwissenschaften 26 (1938), S. 404.

Frequenzanalyse turbulenter Schwankungen.

Von *H. Motzfeld* in Göttingen.

(Aus dem Kaiser Wilhelm-Institut für Strömungsforschung.)

Die der mittleren Geschwindigkeit einer turbulenten Strömung überlagerten Geschwindigkeitsschwankungen lassen sich zusammengesetzt denken aus einer sehr großen Anzahl von harmonischen Schwingungen verschiedener Frequenz und verschiedener Amplitude. Für viele theoretische und auch experimentelle Fragen ist es nun von Bedeutung zu wissen, wie sich die gesamte Schwankungsenergie über den vorkommenden Frequenzbereich verteilt, d. h. man fragt nach dem Spektrum der turbulenten Schwankungsbewegung.

Ist $u'(t)$ die an einem festen Punkt innerhalb einer turbulenten Strömung der mittleren Geschwindigkeit überlagerte Geschwindigkeitsschwankung, so ist der zeitliche Mittelwert der gesamten Schwankungsenergie $\overline{u'^2}$. Es sei nun $f(\omega)$ ($\omega = 2\pi n$ Kreisfrequenz) die Verteilungsfunktion der Energie, für welche gilt

$$\int_0^\infty f(\omega)\, d\omega = 1 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Dann stellt

$$\overline{u'^2} f(\omega)\, \Delta\omega = \Delta A \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

den Beitrag dar, den das Frequenzband von der Breite $\Delta\omega$ zur Gesamtenergie liefert, und

$$\overline{u'^2} \int_0^N f(\omega)\, d\omega = F(N) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

den Beitrag, den das Frequenzband zwischen 0 und N liefert.

Es ist nun gleichgültig, welche der beiden Funktionen $F(\omega)$ oder $f(\omega)$ experimentell ermittelt wird. Die Aufnahme der Geschwindigkeitsschwankungen geschieht am besten mit einer Hitzdrahtbrückenschaltung, wie sie des öfteren beschrieben worden ist. Die Geschwindigkeitsschwankungen u' werden durch eine solche Schaltung in Spannungsschwankungen überführt. Durch Röhrenverstärker können diese Spannungsschwankungen verstärkt werden und durch geeignete Wahl des Arbeitspunktes der Röhren und durch Anwendung von Kompensationsschaltungen ist erreichbar, daß die Spannung am Ausgang des Verstärkers $E' = k_1 u'$ wird ($k_1 = \text{const}$).

Legt man jetzt diese Spannung an die beiden Spulen eines Elektrodynamometers, so zeigt dieses einen Wert an, der proportional zu $\overline{u'^2}$ ist. Schaltet man aber vor das Dynamometer eine Siebkette, die nur die Frequenzen $\omega \leq N$ gleichmäßig hindurchläßt, so ist der von dem Dynamometer angezeigte Wert

$$\overline{u'^2} \int_0^N f(\omega)\, d\omega = \overline{u'^2}\, F(N).$$

Durch Änderung von N an der Siebkette läßt sich die Kurve $\overline{u'^2}\, F(N)$ punktweise bestimmen. Dieses Verfahren wurde von Simmons und Salter[1]) angewendet, um die Spektralkurven der turbulenten Schwankungen hinter einem Maschengitter in einem Windkanal zu ermitteln.

Nach einem Vorschlag von H. Reichardt, von dem auch die Anregung zu den vorliegenden Untersuchungen stammt, kann die Ermittelung von $f(\omega)$ mittels einer Reihe von mechanischen Schwingungssystemen von verschiedenen Eigenfrequenzen ω_0 erfolgen, die durch einen zu E' proportionalen Strom J' elektromagnetisch erregt werden. Aus den Schwingungen dieser Systeme lassen sich die Werte von $f(\omega)$ an den Stellen der Eigenfrequenzen ω_0 berechnen. Eine kurze Betrachtung soll dies zeigen.

Da bei den Versuchen, über die unten noch berichtet werden soll, als Schwingungssysteme Drehschwinger verwendet werden, so wollen wir die Formeln auch für Drehschwinger anschreiben. Bezeichnen wir mit

Θ das Trägheitsmoment des Schwingers,
D die Direktionskraft des Torsionsfadens,
R die Reibungsziffer der Dämpfung,
$M(t)$ das erregende Moment,

so lautet die Gleichung der Drehschwingung

$$\Theta\varphi'' + R\varphi' + D\varphi = M(t) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4).$$

[1]) Simmons und Salter: An experimental determination of spectrum of turbulence. Proc. Roy. Soc. A 920, p. 73 (1938).

Nehmen wir zunächst einmal an, daß die turbulenten Schwankungen sich aus S diskreten harmonischen Schwingungen zusammensetzen, deren Frequenzen Vielfache von $\Delta\omega$ sind. So können wir schreiben

$$k_1 u' = k_1 \sum_1^S c_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - a_\nu) = E' = k_2 J' \quad \text{(5).}$$

Ist nun die Meßanordnung so gewählt, daß das erregende Moment

$$M(t) = k_3 J' = K \sum_1^S c_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - a_\nu) \quad \text{(6)}$$

ist, dann erhalten wir als Lösung der Differentialgleichung

$$\varphi = \Phi e^{-\varkappa t} \sin \omega_0 t + \sum_1^S C_\nu \sin(\nu \Delta\omega t - \Psi_\nu) \quad \text{(7)}$$

mit

$$\varkappa = \frac{R}{\Theta} \quad \text{(7a),}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{\Theta} - \left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2} \quad \text{(7b)}$$

und

$$C_\nu = \frac{K c_\nu}{\sqrt{\Theta\left(\frac{D}{\Theta} - (\nu\Delta\omega)^2\right)^2 + \varkappa^2 (\nu\Delta\omega)^2}} \quad \text{(7c).}$$

Den ersten Term der Lösung (7) brauchen wir nicht weiter zu betrachten. Er klingt nach einiger Zeit ab. In dem zweiten Term stören die Phasenwinkel ψ. Um sie herauszuschaffen, erheben wir diesen Term ins Quadrat und bilden den zeitlichen Mittelwert. Es ergibt sich dann der einfache Ausdruck

$$\overline{\varphi^2} = \frac{1}{2} \sum_1^S C_\nu^2 \quad \text{(8).}$$

Von dem Quadrat der Gl. (5) bilden wir ebenfalls den zeitlichen Mittelwert und erhalten

$$\overline{J'^2} = \frac{1}{2} k_4 \sum_1^S c_\nu^2 = k_4 \overline{u'^2} \quad \text{(9).}$$

Die Größen c_ν^2 sind nun Teilbeträge der gesamten Schwankungsenergie. Nach Gl. (2) und (9) können wir setzen

$$c_\nu^2 = 2\,\overline{u'^2} f(\omega)\,\Delta\omega \quad \text{(10).}$$

Ist nun S eine sehr große Zahl ($S \to \infty$) und $\Delta\omega$ sehr klein ($\Delta\omega \to d\omega$), so läßt sich in Gl. (8) die Summe als Integral schreiben. Sie lautet dann, wenn wir noch die Werte für C_ν^2 und c_ν^2 einführen,

$$\overline{\varphi^2} = K_1 \overline{u'^2} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \varkappa^2 \omega^2}\, d\omega \quad \text{(11).}$$

Um auf einfache Weise hieraus die Spektralkurve $f(\omega)$ zu ermitteln, bedenken wir, daß sich (11) auch schreiben läßt

$$\overline{\varphi^2} = K_1 \overline{u'^2} f(\omega_z) \int_0^\infty \frac{d\omega}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \varkappa^2 \omega^2} \quad \text{(12),}$$

worin $f(\omega_z)$ der Wert der Spektralkurve an einer Zwischenstelle ω_z bedeutet. Da ferner gilt

$$\int_0^\infty \frac{d\,\omega}{\left(\frac{D}{\Theta} - \omega^2\right)^2 + \varkappa^2\,\omega^2} = \frac{\pi}{\varkappa\,\omega_0^{\,2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

so ergibt sich, wenn wir nach $f(\omega_z)$ auflösen,

$$f(\omega_z) = K_2 \frac{\overline{\varphi^2}}{u'^2}\,\omega_0^{\,2}\,\varkappa \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14).$$

Die Stelle ω_z ist uns nicht bekannt. Für kleine $\varkappa$ ist aber die Resonanzbreite des Schwingers sehr schmal. Wir machen also keinen großen Fehler, wenn wir als Näherung setzen: $\omega_z \simeq \omega_0$. Um die Größe dieses Fehlers zu ermitteln, wurden bei den Messungen (siehe unten) dem Schwinger verschiedene Dämpfungen gegeben. Es zeigte sich hierbei, daß für Frequenzen $n \geq 4$ Hz., der Fehler innerhalb der Meßgenauigkeit lag. Für tiefere Frequenzen dagegen war ein Fehler festzustellen. Es ließ sich aber die durch Versuche ermittelte Abhängigkeit der Größe $\overline{\varphi^2}$ von $\varkappa$ durch eine Potenz darstellen. Wir erhalten somit für sehr tiefe Frequenzen die empirische Formel

$$f(\omega_0) = K_3 \frac{\overline{\varphi^2}}{u'^2}\,\omega_0^{\,2}\,\varkappa^p \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (15).$$

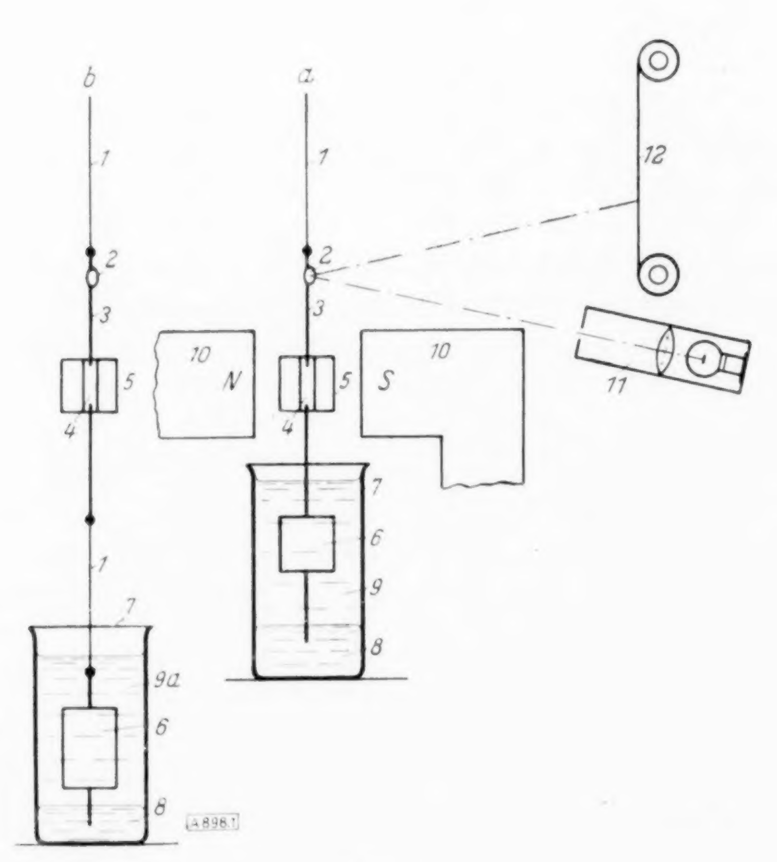




Abb. 1.

Die Apparatur, mit der nach diesem Verfahren Frequenzanalysen durchgeführt wurden, ist in der Abb. 1 schematisch dargestellt. Es wurden als Schwingungssysteme Drehschwinger verwendet. An einem dünnen Torsionsfaden ist als Achse des Schwingers ein steifer Draht aufgehängt, der durch ein Glasröhrchen in der Mitte geteilt ist, so daß zwischen dem oberen und dem unteren Stück keine elektrisch leitende Verbindung besteht. An dem unteren Ende trägt die Achse einen Schwingkörper, an dem oberen einen Spiegel und in der Mitte eine Spule. Ein Ende dieser Spule ist mit dem oberen Stück der Schwingerachse, das andere mit dem unteren verlötet. Die Stromzuführung geschieht durch den Torsionsfaden und durch einen dünnen Platindraht, der in ein Gefäß mit Quecksilber taucht. In dem Gefäß befindet sich über dem Quecksilber eine Dämpfungsflüssigkeit. In diese hinein taucht der Schwingkörper. Bei Eigenfrequenzen über 20 Hz. zeigte es sich, daß es vorteilhafter ist, dem Drehschwinger einen etwas anderen Aufbau zu geben (Abb. 1 b). Da das Trägheitsmoment der Spule und des Spiegels groß genug ist, erübrigt sich die Anbringung eines zusätzlichen Trägheitsmomentes. Dagegen ist das Gewicht der Spule zu gering, um den Torsionsfaden zu straffen. Es befindet sich daher an dem unteren Ende der Schwingerachse ein zweiter Torsionsfaden, an dem ein Gewicht hängt, das beide Fäden strafft. Durch dieses Gewicht wird weiter erreicht, daß der Drehschwinger stets senkrecht hängt, wodurch überlagerte

Schwingungen, hervorgerufen durch das Schwerefeld, vermieden werden. Das Gewicht taucht in ein zähes Öl und bleibt bei den schnellen Oszillationen des Schwingers praktisch in Ruhe.

In der zur Verfügung stehenden Apparatur befinden sich 6 Schwinger der ersten und 4 Schwinger der zweiten Art. Die Eigenfrequenzen liegen zwischen 0,2 und 43 Hz. Die Schwinger sind so aufgehängt, daß sich die Spulen zwischen den Polen N und S eines Elektromagneten befinden. Für jeden Schwinger ist eine Beleuchtungsvorrichtung vorhanden. Der von dieser Beleuchtungsvorrichtung ausgehende Lichtstrahl wird von dem Spiegel reflektiert und fällt auf einen Filmstreifen. Letzterer kann mittels eines Motors mit verschiedenen Geschwindigkeiten vorbeigezogen werden. Die ganze Apparatur ist in einem lichtdichten Kasten untergebracht.

An die Spulen der Schwinger wird nun die Ausgangsspannung E' des Verstärkers gelegt. Durch die jetzt auf die Spulen wirkenden Drehmomente werden die Schwinger angeregt und ihre Schwingungen werden auf den Filmstreifen aufgezeichnet. Die Versuche haben gezeigt, daß zur Erlangung guter Mittelwerte Beobachtungszeiten von 12 bis 15 Minuten erforderlich sind.

Wie aus der Formel (15) hervorgeht, sind für die die Berechnung von $f(\omega_0)$ verschiedene Größen erforderlich. Die Konstante K_2 wird durch Eichung für jeden einzelnen Schwinger ermittelt. $\overline{u'^2}$ wird mit dem Dynamometer gemessen. Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen werden während der Messungen auf den Filmstreifen in gewissen Zeitabständen Lichtmarken gegeben. Das logarithmische Dekrement $\varkappa$ ergibt sich aus der Abklingkurve der Schwinger. Der quadratische Mittelwert der Amplitude $\overline{\varphi^2}$ wird aus den aufgezeichneten Schwingungskurven mittels eines Quadratplanimeters bestimmt. Zur Ermittelung der Abhängigkeit des Wertes $\overline{\varphi^2}$ von $\varkappa$ ist es notwendig, verschiedene Meßreihen aufzunehmen mit geänderter Dämpfung der Schwinger. Aus den zu einem Schwinger gehörenden Werten ist durch logarithmische Auftragung der Exponent p und der Faktor K_3 für diesen Schwinger zu finden.

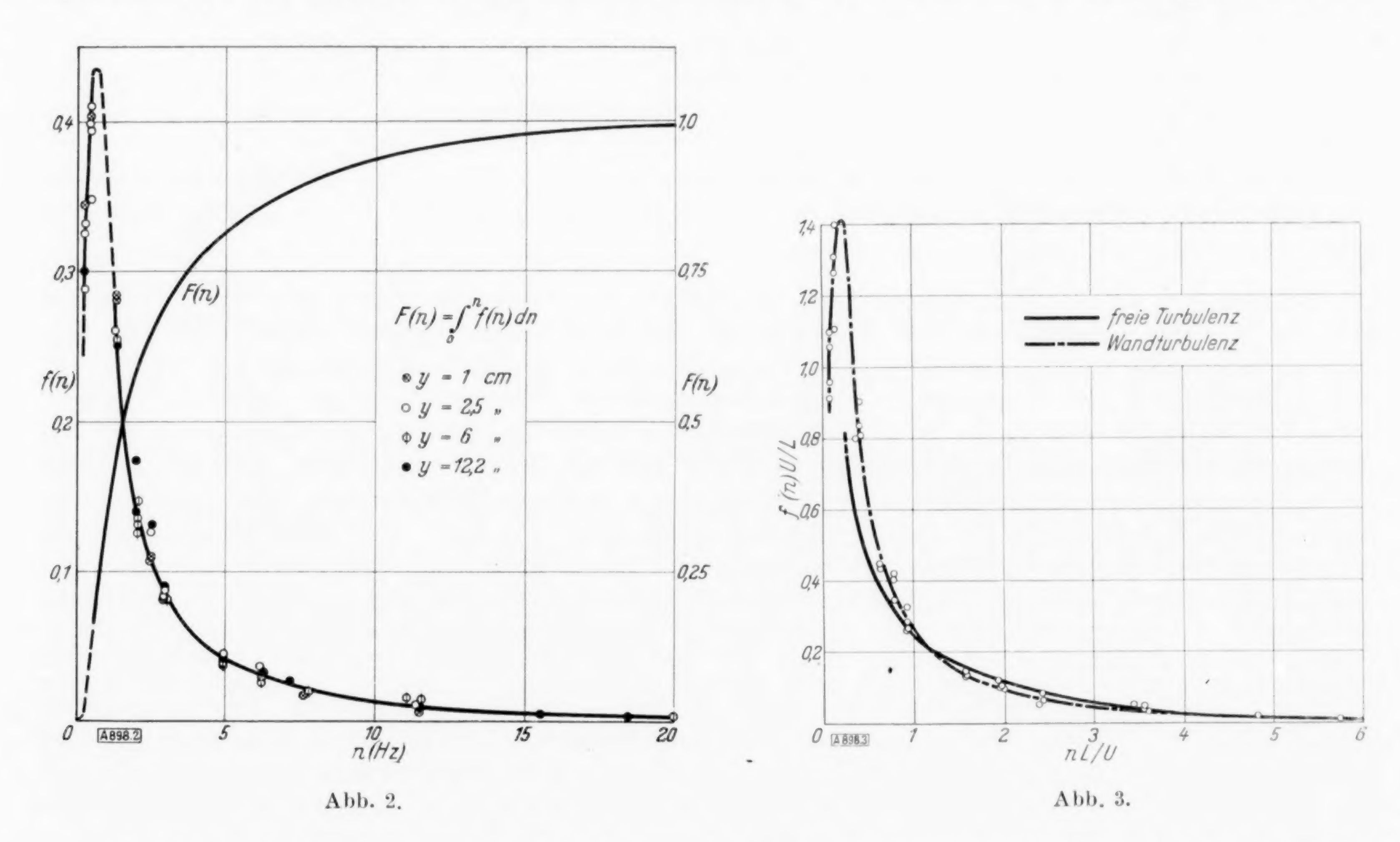


Abb. 2. Abb. 3.

In der Abb. 2 sind nun die Ergebnisse der Messungen wiedergegeben, die der Verfasser in der turbulenten Strömung eines rechteckigen Kanals von 24 cm Höhe und 100 cm Breite bei einer Mittengeschwindigkeit von 100 cm/s nach diesem Verfahren durchgeführt hat. Es zeigte sich dabei, daß innerhalb der Meßgenauigkeit die Spektralkurven für die verschiedenen Wandabstände zusammenfallen.

In der Abb. 3 werden nun diese Ergebnisse mit denen von Simmons und Salter verglichen. Als Ordinate ist hier aufgetragen $\frac{U f(n)}{L}$ über der Abszisse $\frac{n\,L}{U}$. Für die Turbulenz hinter einem Gitter ist U die mittlere Geschwindigkeit im Windkanal und L die Maschenweite des Gitters. Für die Wandturbulenz ist U die mittlere Geschwindigkeit im Kanal und L die Kanalhöhe. Die ausgezogene Kurve gibt die Ergebnisse von Simmons und Salter wieder. Man sieht, daß sie mit den unseren gut vergleichbar sind. 898

Drei Filme über konforme Abbildung.

Von *Helmut Heinrich* in Breslau.

Aufgabe eines mathematischen Unterrichtsfilms, der als Anschauungsmittel bei mathematischen Vorlesungen verwendet werden soll, kann es m. E. nur sein, geometrische Beziehungen durch Bewegungsvorgänge darzustellen. So ist der Grundgedanke, dem die vorgeführten drei Filme über konforme Abbildung ihre Entstehung verdanken, der, daß bei jeder Abbildung zwischen zwei Ebenen der geometrische Zusammenhang zwischen den Punkten der einen Ebene und ihren Bildpunkten in der anderen Ebene besonders deutlich wird, wenn man zugeordnete Bewegungen der beiden Punkte darstellt, d. h. wenn man einen Punkt der ersten Ebene eine bestimmte Bahn durchlaufen und den zugehörigen Bildpunkt die dadurch zwangsläufig gegebene Bewegung gleichzeitig ausführen läßt.

Es ist einleuchtend, daß derartige Filme Trickfilme sein müssen. Das bisher übliche außerordentlich zeitraubende und darum auch sehr kostspielige Verfahren der Herstellung solcher Filme, bei dem für jede Bewegungsphase eine besondere Zeichnung notwendig war und die aufeinanderfolgenden Zeichnungen genauestens justiert werden mußten, mag in erster Linie schuld daran sein, daß die Zahl der mathematischen Unterrichtsfilme verschwindend gering ist. Um auf diesem Gebiete schneller vorwärts zu kommen, mußte ein anderes wesentlich einfacheres Aufnahmeverfahren entwickelt werden. Es ist in der Reichsstelle für den Unterrichtsfilm (R. f. d. U.) in Berlin zum ersten Male im September 1937 bei der Herstellung des ersten der drei vorgeführten Filme erprobt worden. Es ist außerordentlich einfach und kann kurz folgendermaßen umrissen werden.

Der zu verfilmende Bewegungsvorgang wird auf geeignetem Pauspapier mit Bleistift derart vorgezeichnet, daß die Kurven, deren Entstehung gezeigt werden soll, mit der notwendigen Einteilung in kurze Schritte versehen werden. Diese Vorzeichnung wird auf eine von unten stark beleuchtete waagerechte Glasplatte gebracht, über der sich der Aufnahmeapparat befindet. Die einzelnen Felder, in die die vorgezeichnete Kurve durch die Schritteinteilung zerfällt, werden nunmehr nacheinander mit schwarzer Tusche von Hand ausgefüllt, und nach jedem Schritt wird eine Aufnahme gemacht. Die Belichtung und Entwicklung des Films kann so vorgenommen werden, daß im fertigen Film von der Vorzeichnung nichts zu sehen ist.

Diese Art des Trickverfahrens hat ersichtlich ihre Grenzen. Innerhalb dieser Grenzen aber ist es, was Einfachheit und Aufwand an Zeit und Kosten angeht, nicht zu übertreffen, und es führt sehr schnell zum Ziel. Die Vorzeichnung erfordert in Anbetracht der Ansprüche, die an Sauberkeit und Genauigkeit — vor allem auch der Schritteinteilung — gestellt werden, selbstverständlich ihre Zeit, die Aufnahme selbst aber ist bei einiger Übung der daran Arbeitenden in wenigen Tagen erledigt. Da es sich bei den vorgeführten drei Filmen um erste Versuche gehandelt hat, sind verhältnismäßig einfache Gegenstände aus dem Gebiete der konformen Abbildung für die Verfilmung ausgesucht worden. Der erste Film zeigt die unter der Bezeichnung Kreisverwandtschaft bekannten Beziehungen zwischen den Geraden und Kreisen der z- und der w-Ebene, wie sie bei der konformen Abbildung durch die Funktion $w=\frac{1}{z}$ auftreten. Der zweite Film stellt für die Funktion $w=z+\frac{1}{z}$ die Abbildung der Nullpunktsgeraden und -kreise auf konfokale Ellipsen und Hyperbeln dar. Der dritte Film schließlich veranschaulicht für dieselbe Abbildungsfunktion die bekannte Konstruktion von Joukowsky-Profilen aus ihren Bildkreisen durch einen Bewegungsvorgang und zeigt noch die Zuordnung der zugehörigen Stromlinien bei zirkulationsfreier Strömung um Bildkreis und Profil.

Einzelheiten über den Aufbau der Filme, auf die hier nicht eingegangen werden kann, können leicht aus den Veröffentlichungen der R. f. d. U., die für jeden einzelnen Film herausgegeben werden, entnommen werden. 902

Zur Berechnung der turbulenten Ablösung.

Von *F. Schultz-Grunow* in Göttingen.

Um zur näherungsweisen Berechnung der turbulenten Ablösung an der e b e n e n Wand einen Beitrag zu liefern, wird an bekanntem Versuchsmaterial[1]) über die turbulente verzögerte Grenzschicht die Frage untersucht, ob in der Grenzschichtbewegungsgleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+\underline{v\frac{\partial u}{\partial y}}=U\frac{\partial U}{\partial x}+\underline{\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \tau}{\partial y}}$$

(u, v, x, y Geschwindigkeitskomponenten und Koordinaten parallel und senkrecht zur Wand; ϱ Dichte; τ Schubspannung; U Potentialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht) die unterstrichenen Glieder in einem Streifen in der Grenzschicht, der durch gewisse Linien eingegrenzt ist, von gleicher Größe sind. Würde das Experiment die Frage bejahen, so ergäbe sich eine wesentliche Vereinfachung der Rechnung, indem dann in dem betreffenden Streifen die Bewegungsgleichung

$$u\frac{\partial u}{\partial x}=U\frac{\partial U}{\partial x}$$

lautete, welche sich sofort integrieren ließe zu

$$u_2^2-u_1^2=U_2^2-U_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Index 2 beziehe sich auf den Querschnitt, in dem die Ablösung einsetzt, Index 1 bezeichne einen Querschnitt in der turbulenten Verzögerungsstrecke. Die Ablösung sei dadurch gekennzeichnet, daß $u_2=0$ ist, so daß dann aus (1) sich

$$U_2^2=U_1^2-u_1^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

ergibt. Diese Kennzeichnung der Ablösung verlangt es, die Beziehung (2) in einem Streifen zu bestätigen, der sich im Verlaufe der Verzögerung nicht zu weit von der Wand entfernt, da erfahrungsgemäß die Ablösung in unmittelbarer Wandnähe einsetzt. Deshalb wurde der Streifen durch Linien $\frac{x}{\delta}=$ konst. ($\delta=$ Grenzschichtdicke) eingegrenzt und nicht durch Linien, deren Wandabstände der Verdrängungsdicke oder Impulsdicke proportional sind. Letztere Längen hätten den Vorteil, sich wesentlich genauer als die Grenzschichtdicke aus dem Versuch ermitteln zu lassen.

Die Gültigkeit der Beziehung (2) wurde am Versuch in der Weise geprüft, daß jeweils auf Linien $\frac{y}{\delta}=0{,}1$; $0{,}15$; $0{,}2$ in jedem Meßquerschnitt die Geschwindigkeit u_1 abgelesen, mit der Potentialgeschwindigkeit U_1 des gleichen Querschnittes in (2) eingeführt und U_2 daraus berechnet wurde, das ist jene Potentialgeschwindigkeit, bei der die Ablösung einsetzen soll. Es ergab sich, daß die für $\frac{y}{\delta}=0{,}15$ erhaltenen U_2-Werte mit Ausnahme des Beginns der Verzögerungsstrecke tatsächlich in guter Näherung mit der Potentialgeschwindigkeit des der Ablösung am nächsten gelegenen Meßquerschnittes übereinstimmen und daß die in den übrigen Abständen erhaltenen Werte eine Übereinstimmung zeigen, daß sich (2) auch in der Umgebung von $\frac{y}{\delta}=0{,}15$ in guter Näherung bestätigt, womit sich die unvermeidbare Ungenauigkeit in der Ablesung der Grenzschichtdicke als wenig einflußreich erweist.

Der Vorteil bei der Anwendung der Beziehüng (2) zur Vorausberechnung der Ablösung liegt darin, daß nur der Verlauf der Pontentialgeschwindigkeit am Rande der Grenzschicht bekannt zu sein braucht. Ein Nachteil besteht in der willkürlichen Annahme von u_1, da das Geschwindigkeitsprofil im Querschnitt 1 nicht bekannt ist. Am besten ist es, im Beginn der Verzögerungsstrecke nach G r u s c h w i t z[1]), im Rest nach dem hier entwickelten, wesentlich einfacheren Verfahren zu rechnen, da das erste Verfahren im Verlauf der Verzögerungsstrecke gute Übereinstimmung mit dem Versuch ergeben hat, während sich das zweite Verfahren für den Rest der Verzögerungsstrecke als brauchbar erweist. Die Auswertung hat ergeben, daß man mit dem ersten Verfahren höchstens bis zu dem Wert 0,65 des in diesem Verfahren auftretenden Formparameters zu rechnen braucht. Der diesem Wert entsprechende, in (2) einzuführende Wert von u_1 läßt sich aus den Versuchen ermitteln, da die Form der Geschwindigkeitsprofile in der verzögerten Grenzschicht in guter Näherung nur von diesem Formparameter abhängt. 899

[1]) E. G r u s c h w i t z: Die turbulente Reibungsschicht in ebener Strömung bei Druckabfall und Druckanstieg. Ing.-Arch., Band II (1931), S. 321.

Zur Berechnung von Kreiselrädern[1].

Von *A. Betz* in Göttingen und *I. Flügge-Lotz* in Berlin.

Die Berechnung der Schaufelform von Kreiselrädern erfolgt in vielen Fällen mit Hilfe der Eulerschen Theorie unter der Annahme, daß die Strömung nicht nur auf der Oberfläche der Schaufeln der Schaufelform folgt, sondern auch zwischen den Schaufeln annähernd den gleichen Verlauf hat. Bei schnellaufenden Rädern mit geringer Schaufelzahl, bei denen diese Voraussetzung nicht mehr zutrifft, hat man Verfahren, die in der Flugtechnik für den einzelnen Flügel entwickelt sind, zur Berechnung herangezogen und den Einfluß der Nachbarflügel als Störung hinzugenommen. Ein wesentliches Hilfsmittel dieser Methode ist die konforme Abbildung. Diese Berechnungsart ist um so bequemer, je weiter der Abstand der Schaufeln ist. Das vorliegende Verfahren soll die Lücke zwischen den bestehenden Methoden ausfüllen. Man denkt sich die einzelnen zylindrischen Schaufeln durch tragende Wirbelflächen ersetzt und berechnet die Strömungsfelder bei Rädern mit konstanter Radbreite und dünnen Schaufeln mit Hilfe periodischer Wirbelfelder, bei Rädern mit abnehmender Radbreite mit Hilfe periodischer Wirbel- und Quellfelder. Die endliche Dicke der Schaufeln kann ebenfalls durch hinzutretende Quellfelder berücksichtigt werden. Es hat sich gezeigt, daß die Abnahme der Radbreite für Räder mit mehr als zwei Schaufeln nur Einfluß hat auf die mittlere radiale Durchflußgeschwindigkeit, so daß man praktisch mit Wirbelfeldern allein auskommt. Der Aufbau der Rechnung gestattet es, den Einfluß der endlichen Schaufelzahl auf die Wirkungsweise des Rades abzuschätzen. 906

Messungen an Kreistragflächen und Vergleich mit der Theorie der tragenden Fläche.

Von *M. Hansen* in Göttingen.

Vor 2 Jahren berichtete Kinner[2]) auf der Tagung der GAMM in Dresden über seine theoretischen Rechnungen zur Aerodynamik der Kreistragfläche. Inzwischen wurden zur Nachprüfung der Theorie in der Aerodynamischen Versuchsanstalt, Göttingen, Messungen an ebenen und gewölbten Kreistragflächen vorgenommen, die in der Arbeit von Kinner theoretisch behandelt waren. Im folgenden werden die gefundenen Meßergebnisse mit der Theorie verglichen.

Aus der Arbeit von Kinner sei hier zum besseren Verständnis der Meßergebnisse nur ein Punkt näher behandelt, nämlich die Saugkraft. Sie entsteht bekanntlich beim Umströmen des Vorderrandes, also bei nicht stoßfreiem Eintritt, und äußert sich in einer Erniedrigung des Widerstandes. In der Theorie der tragenden Linie ist die Saugkraft im Widerstand enthalten. Der so errechnete Widerstand sei mit Linienwiderstand W_L bezeichnet. In seiner Arbeit berechnet Kinner für die Kreistragfläche auch den Widerstand ohne die Saugkraft. Dieser Widerstand heiße Flächenwiderstand W_F. Der Unterschied der beiden Widerstände ergibt also die theoretische Saugkraft bei Umströmung der Vorderkante. Man bekommt somit theoretisch zwei Polaren, indem man den Auftriebsbeiwert c_a einmal zusammen mit dem Beiwert des induzierten Widerstandes c_{wF} und das andere Mal mit c_{wL} zusammen aufträgt.

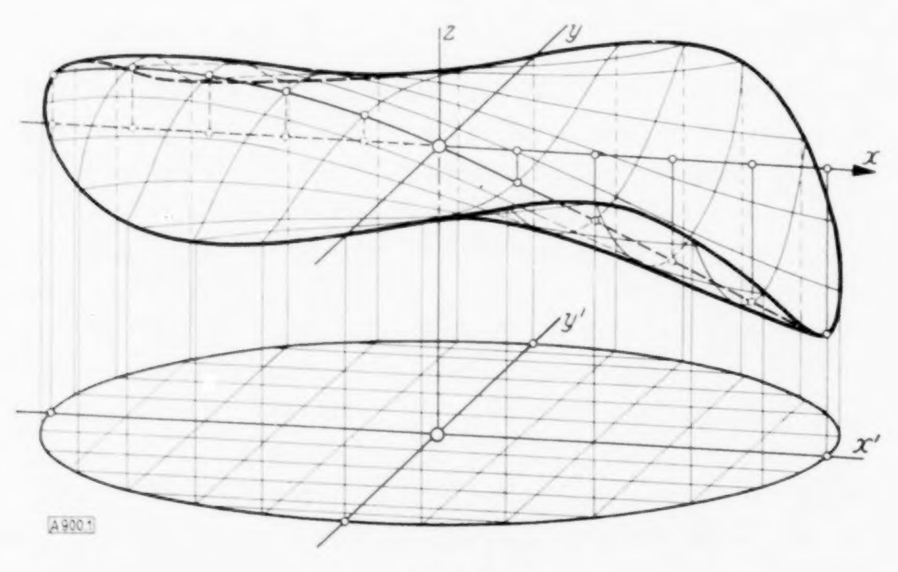


Abb. 1.

[1]) Eine ausführliche Veröffentlichung erfolgt demnächst im Ingenieur-Archiv.

[2]) Kinner, W.: Die kreisförmige Tragfläche auf potentialtheoretischer Grundlage. Ingenieur-Archiv. Bd. 8, H. 1 (1937). Vgl. ZAMM, Bd. 16 (1936), S. 349 bis 352.

Bei der wirklichen Tragfläche ist eine Umströmung der Vorderkante im Sinne der Theorie der tragenden Linie, d. h. unter vollständiger Erhaltung der Saugkraft, nicht zu erwarten. Man weiß andererseits aus einer genaueren Untersuchung der Strömungsverhältnisse an der Vorderkante bei verschiedener Abrundung von Wolff[3]), daß selbst bei der feinsten möglichen Zuschärfung immer noch eine geringe Saugkraft vorhanden ist. Um einen gewissen Einblick in die Verhältnisse an der Anströmkante zu bekommen, wurden bei den Messungen an der ebenen Kreistragfläche diese Kanten verschieden ausgebildet.

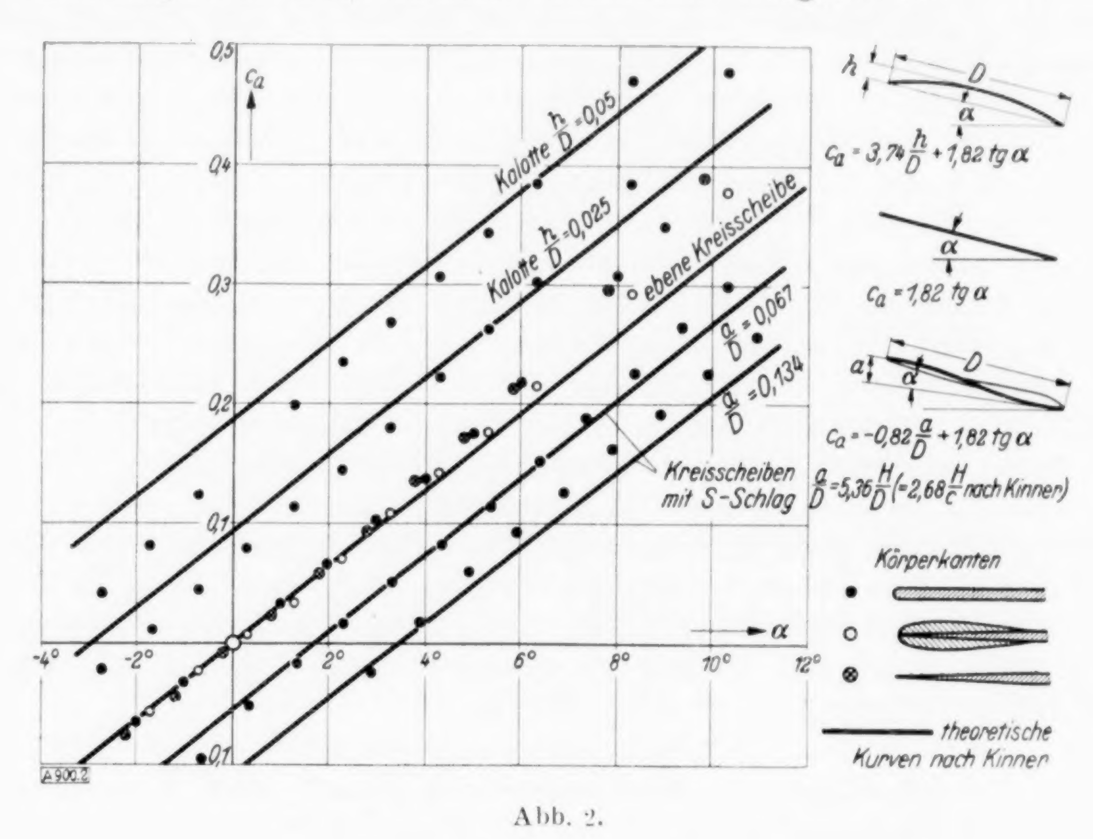


Abb. 2.

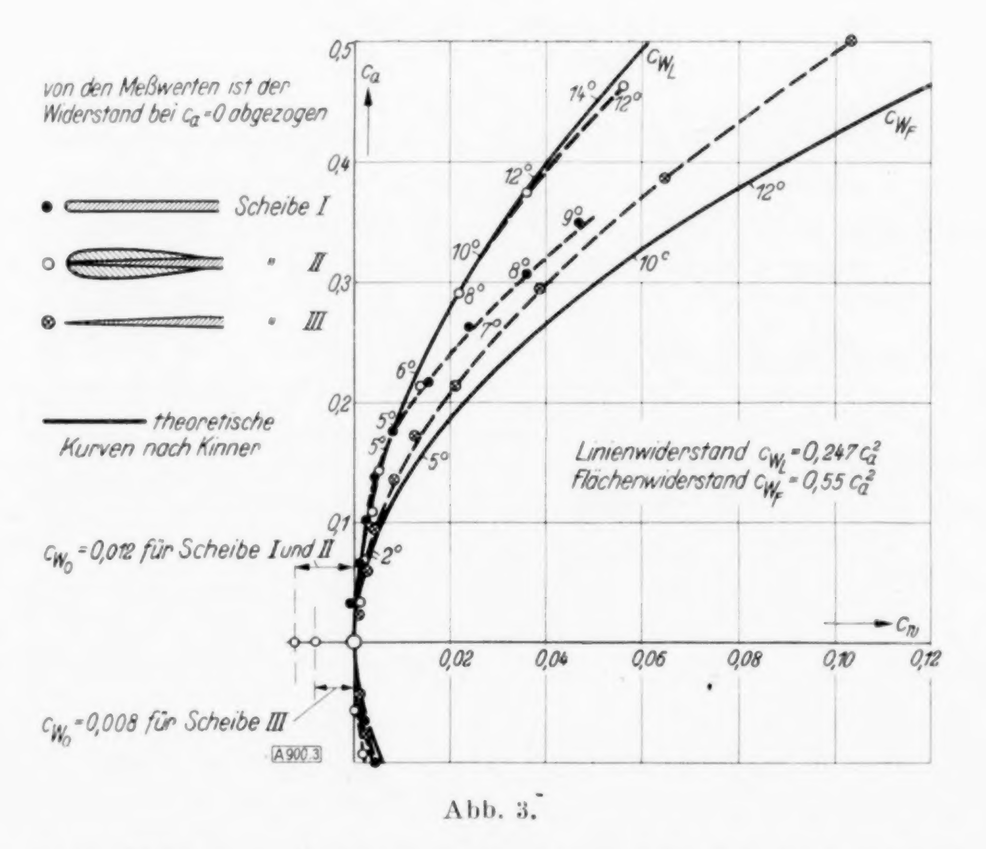


Abb. 3.

Es wurden 3 ebene Flächen mit den auf Abb. 2 und 3 skizzierten Vorderrandausbildungen und 4 gewölbte untersucht. Von den gewölbten waren 2 Kugelkalotten mit den Pfeilhöhen $h/D = 0{,}025$ und $0{,}05$, die restlichen beiden S-Flächen mit den Werten $a/D = 0{,}067$ bzw. $0{,}134$. Die S-Flächen (Abb. 1) wurden nach einer von Kinner angegebenen räumlichen Funktion gerechnet. Diese Funktion ergab sich aus 2 Bedingungen: Die Tragfläche sollte druckpunktfest sein wie die ebene Kreisfläche. Sie sollte dabei aber eine geringere theoretische Saugkraft besitzen als die ebene Kreistragfläche.

Für die Kraftmessungen waren die ebenen Kreisscheiben aus Eisenblech und die gewölbten zwecks leichterer Herstellung aus Leichtmetall von 4 mm Dicke und 400 mm Ø angefertigt. Die Messungen selbst wurden im Kanal IV der Aerodynamischen Versuchsanstalt bei einer Windgeschwindigkeit von 40 m/sec durchgeführt. Die Kräfte wurden in der üblichen

[3]) Wolff, E.: Einfluß der Abrundung scharfer Eintrittskanten auf den Widerstand von Flügeln. Ingenieur-Archiv, Bd. IV, 1933, S. 521.

Weise ermittelt. Für den Vergleich mit der Theorie wurden nur die Kräfte bei kleinen Anstellwinkeln herangezogen.

Aus den Ergebnissen werden im folgenden drei Abbildungen herausgegriffen. Abb. 2 zeigt die Auftriebsbeiwerte sämtlicher untersuchter Kreistragflächen aufgetragen über den Anstellwinkel α. Die theoretischen Kurven sind zu den Meßpunkten eingezeichnet worden. Es ergibt sich für die ebenen Kreistragflächen befriedigende Übereinstimmung von Theorie und Messung bis zu etwa $\alpha = 3^\circ$ bei den ebenen Flächen. Dann tritt rasch ansteigend mit α eine Abweichung ein. Der gemessene Auftrieb ist größer als die Theorie ergibt. Bei den gewölbten Kreisflächen ist die Übereinstimmung mit der Theorie befriedigend etwa in der Gegend, wo die Saugkraft der Theorie nach Null ist. Die zugehörigen Winkel sind bei den Kalotten 2,45° bzw. 4,9°, bei den S-Flächen 3,83° bzw. 7,63°. Oberhalb und unterhalb dieser Stelle beginnt bald eine mit α stark zunehmende Abweichung wie bei den ebenen Flächen. Bei den S-Flächen mußte eine Vergrößerung des gemessenen Anstellwinkels α um 0,5° bzw. 0,8° vorgenommen werden, um Messung und Theorie einigermaßen zur Deckung zu bringen. Die Erklärung für diese Abweichung kann gesucht werden in der Reibungsgrenzschicht, welche die Wirkung der S-Krümmung abschwächt. Ein ähnlicher, wenn auch geringerer Einfluß zeigt sich bei den Kalotten. Für diese wurden jedoch die Meßpunkte nicht korrigiert.

Abb. 3 gibt die theoretischen Polaren für die ebenen Kreistragflächen mit den zugehörigen Meßpunkten. Zwecks besseren Vergleichs mit der Theorie wurde der Widerstand c_{w_0} bei $c_a = 0$, der die Oberflächenreibung darstellt, abgezogen.

Die Meßergebnisse der ebenen Kreistragflächen mit verschiedener Ausbildung der Anströmkante zeigten deutliche Unterschiede. Die größte Einbuße an Saugkraft hat erwartungsgemäß die Scheibe mit zugeschärftem Rande. Etwas mehr Saugkraft hat die Scheibe, bei welcher der Rand abgerundet war. Praktisch vollständig erhalten hat sich die Saugkraft bei der vorne mit Wulst versehenen ebenen Kreisfläche.

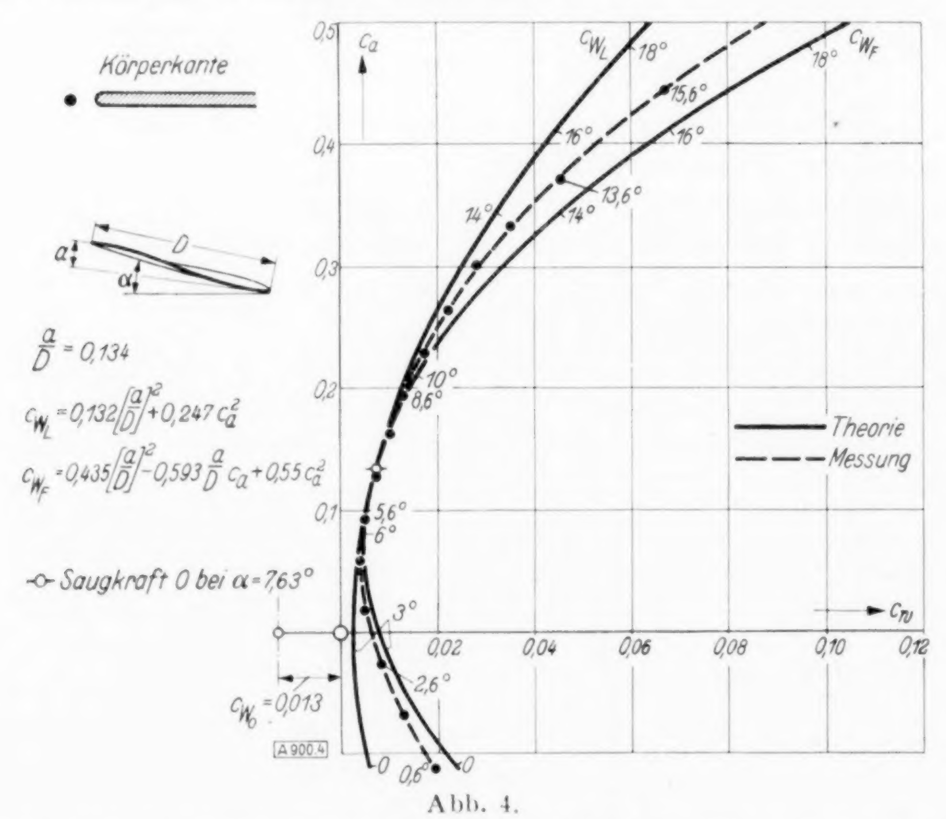


Abb. 4.

Die Abb. 4 zeigt die Polaren einer gewölbten Fläche und zwar der Fläche mit starkem S-Schlag. Der Wert der Oberflächenreibung wurde hierbei ermittelt durch Verschieben der beiden theoretischen Polaren unter Beibehaltung der Abszissenachse, bis die Meßpunkte zwischen c_{w_F} und c_{w_L} lagen. Der auf diese Weise gefundene Wert von c_{w_0} stimmte praktisch mit dem c_{w_0} der ebenen Fläche von gleicher Abrundung der Vorderkante überein. Infolge der gewählten Abrundung ist zu erwarten, daß ein Teil der Saugkraft verlorengeht, was durch die Messung bestätigt wird.

An einer ebenen Fläche wurde außerdem eine Messung der Druckverteilung vorgenommen. Zu diesem Zwecke wurde eine ebene Fläche von 4 mm Dicke mit abgerundeter Kante hergestellt. Die mit dieser Platte gemessenen Drücke wurden mit den theoretischen Druckverteilungen bei Anstellwinkel 4° bzw. 8° verglichen. Bis 4° stimmen die Mittelschnitte verhältnismäßig gut mit der Theorie überein. Am seitlichen Rande zeigen sich stärkere Abweichungen an der Stelle, wo der Wirbelzopf sich bildet. Bei 8° erkennt man bereits in der Nähe des Vorderrandes stärkere Abweichungen. Es zeichnet sich hier deutlich die Stelle des Wirbels ab, welcher sich bei der Umströmung der Vorderkante auf der Saugseite bildet. Im übrigen zeigen sich am seitlichen Rande die gleichen Abweichungen wie bei 4° Anstellwinkel.

Zur Theorie der Leitapparate für Propeller[1].

Von *A. Betz* VDI in Göttingen.

In dem Strahl hinter einem Schraubenpropeller sind zusätzliche Geschwindigkeiten enthalten, deren Energie einen Verlust bedeutet. Die Axialkomponente dieser zusätzlichen Geschwindigkeiten hängt nach dem Impulssatz mit dem Schub des Propellers zusammen, läßt sich also nicht vermeiden. Dagegen läßt sich die Energie, welche in den mit dem Drehmoment zusammenhängenden Tangentialgeschwindigkeiten, dem Schraubendrall, enthalten ist, durch flügelartige Flächen hinter dem Propeller, sogenannte Leitapparate, zurückgewinnen. Sieht man von den Verlusten, die durch den Widerstand des Leitapparates entstehen, ab, so läßt sich die Drallenergie durch einen Leitapparat mit unendlich vielen Schaufeln vollständig wiedergewinnen, bei endlicher Schaufelzahl dagegen nur zum Teil. Man kann sich nun die Frage vorlegen, wieviel Energie man mit einer bestimmten Schaufelzahl wiedergewinnen kann, und wie man die Zirkulation um die Schaufeln verteilen muß, um dieses Optimum zu erreichen. Diese Frage läßt sich mit den auch sonst in der Tragflügel- und Propellertheorie üblichen Verfahren behandeln.

Zunächst wurde die günstigste Zirkulationsverteilung bei endlicher Schaufelzahl des Leitapparates untersucht, wobei für die Schaufeln in radialer Richtung keine Begrenzung vorgeschrieben war. Auf Grund der gefundenen Zirkulationsverteilung ergibt sich dann der Energie- bzw. Schubgewinn durch den Leitapparat für verschiedene Schaufelzahlen.

Bei dieser Rechnung zeigte sich, daß die außerhalb des Strahles liegenden Teile des Leitapparates noch verhältnismäßig viel Zirkulation haben mußten, um den Optimumsbedingungen zu genügen. Um zu erkennen, ob diese äußeren Teile auch für den Schubgewinn wesentlich sind, wurden die Rechnungen dann auch für Leitapparate mit begrenzter Schaufellänge durchgeführt. Es ergab sich, daß bei geringer Schaufelzahl die außerhalb des Strahles liegenden Schaufelteile auch noch merklich zum Schubgewinn beitragen.

Dieses Ergebnis ist aber für die praktische Verwendung irreführend, da der Widerstand der Schaufeln vernachlässigt ist. Wenn man diesen Widerstand berücksichtigt, der bei den äußeren Schaufelteilen verhältnismäßig groß im Vergleich mit dem theoretischen Schubgewinn ist, so ergeben sich je nach dem Drall des Schraubenstrahles und je nach der Gleitzahl der Leitschaufeln Schubgewinne, welche bei einer bestimmten Schaufellänge ein Maximum haben.

Die Nabe des Leitapparates kann einen anderen Durchmesser als die Nabe des Propellers haben. Auf das kegelige Übergangsgebiet zwischen Propellernabe und Leitapparatnabe wirken infolge der vom Drall herrührenden Zentrifugalkräfte Unterdrücke, die eine Kraftkomponente in axialer Richtung ergeben. Ist die Leitapparatnabe größer als die Propellernabe, so ergibt sich eine Kraft in Richtung des Schubes, also ein Gewinn, welcher aus der Drallenergie entnommen wird. Umgekehrt entsteht, wenn die Leitapparatnabe kleiner als die Propellernabe ist, ein zusätzlicher Widerstand, der in einer Erhöhung der Drallenergie zum Ausdruck kommt. Es ist deshalb nicht günstig die Leitapparatnabe kleiner als die Propellernabe zu machen. Wenn sich hinter dem Propeller noch Körper mit größerem Durchmesser befinden (Flugzeugrumpf, Motorgondeln), so ist es zweckmäßig, die Leitschaufeln an der dicksten Stelle dieses Körpers anzubringen. 901

Vorträge aus dem Gebiet der Elastizität.

Beitrag zur näherungsweisen Ermittlung der Biegeeigenfrequenzen mehrfach abgesetzter Wellen.

Von M. *Schilhansl* in Heidenheim/Brenz.

Die überwiegende Mehrzahl der Untersuchungen über Biegeschwingungen von Wellen, welche das Problem analytisch behandeln, bezieht sich auf die „glatte" Welle, d. h. solche Wellen, die durchlaufend einen und denselben Durchmesser besitzen. Mit den graphischen Verfahren dagegen ist es ohne weiteres möglich, auch die abgesetzte Welle zu berechnen; bei mehrfach gelagerten Wellen wird jedoch dieses Verfahren langwierig und bei der Überlagerung der einzelnen Biegelinien, die zur Ermittlung der statisch unbestimmten Auflagerkräfte notwendig sind, auch ungenau. In der „Hütte" (3. Abschnitt, III. Kapitel, Unterabschnitt II c a auf Seite 441 und 442 der 26. Auflage) ist ein analytisches Verfahren mitgeteilt, das auf einer Reduktion auf die „glatte" Welle beruht, aber lediglich die niedrigste Eigenfrequenz einigermaßen zuverlässig liefern kann.

Ich möchte nun ein neues Verfahren in Vorschlag bringen, das in diesem Auszug nur an dem Beispiel einer masselosen Welle mit einer Einzelmasse in der Mitte aufgezeigt werden

[1]) Eine ausführliche Darstellung erscheint im „Ing.-Arch." 9, Heft 6.

soll. Die Welle sei zweifach — also statisch bestimmt — gelagert und setze sich aus mehreren Stücken zusammen, deren Durchmesser voneinander verschieden sind. Bei dieser Problemstellung genügt für die Berechnung der Eigenfrequenz die Kenntnis der Masse und der elastischen Konstanten. Letztere ist aber nichts anderes als diejenige Kraft, die an der Stelle der Masse angebracht werden muß, um die Masse um die Längeneinheit zu verschieben oder anders ausgedrückt: der reziproke Wert der elastischen Konstanten ist die Verschiebung f des Massenpunktes, wenn an der Stelle der Masse die Lasteinheit angreift. Um die Verschiebung f zu berechnen, gehe ich von der Differentialgleichung der elastischen Linie aus:

$$E J \frac{d^2 y}{d x^2} = -M \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Mit Rücksicht darauf, daß für die abgesetzte Welle J nicht konstant, sondern eine Funktion der Abszisse x ist, schreibe ich folgendermaßen:

$$E J_0 \frac{d^2 y}{d x^2} = -M \frac{J_0}{J_x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2).$$

Hier ist J_0 irgend ein Bezugsträgheitsmoment. Um auf der rechten Seite eine mit den üblichen und jedem Ingenieur zugänglichen Methoden integrierbaren Ausdruck zu erhalten, entwickle ich J_0/J_x in eine Reihe, von der ich verlangen muß, daß sie den Verlauf der J_0/J_x nicht nur in der Umgebung eines beliebigen Punktes, sondern über die ganze Wellenlänge gut annähert. Es kommen also Fourier-Reihen und Reihen mit Kugelfunktionen in Betracht. Letztere sind empfehlenswerter. Man wählt als Längeneinheit den halben Lagerabstand; dann hat das linke Auflager die Abszisse -1 und das rechte die Abszisse $+1$. Das Moment vom linken Auflager bis zur Last ist $1/2\,(1+x)$ und von der Last bis zum rechten Auflager $1/2\,(1-x)$. Die Reihenentwicklung selbst liefert, wobei P_n die Kugelfunktion n-ter Ordnung bedeutet:

$$J_0/J_x = \sum_0^\infty a_n P_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3).$$

Bezüglich der numerischen Berechnung der Koeffizienten a_n, die aus der allgemeinen Vorschrift

$$a_n = \frac{2n+1}{2} J_0 \int_{-1}^{+1} \frac{P_n(x)}{J_x}\, d x \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

folgen, wird auf die Funktionentafeln von Jahnke und Emde (Verlag Teubner S. 79 ff.) verwiesen. Setzen wir in Gl. (3) die expliziten Ausdrücke für die Kugelfunktionen

$$P_n(x) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{n!} \left[x^n - \frac{n(n-1)}{2(2_n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-3)}{2 \cdot 4 \cdot (2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - + - \right. \quad . \quad (5)$$

ein, multiplizieren aus und ordnen nach Potenzen von x, so erhalten wir

$$J_0/J_x = \sum_0^\infty b_n x^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

wobei man allerdings in Kauf nehmen muß, daß die Koeffizienten b_n selbst wieder unendliche Summen bestimmter Vielfacher von a_n sind und ihr Genauigkeitsgrad davon abhängt, wie viele Glieder der Kugelfunktionenreihe man berücksichtigt hat.

Die Gleichung der elastischen Linie lautet also für den Ast von -1 bis 0

$$E J_0 \frac{d^2 y}{d x^2} = -\frac{1}{2}(1+x) \sum_0^\infty b_n x^n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

oder

$$2 E J_0 \frac{d^2 y}{d x^2} = \sum c_m x^m \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (8),$$

wobei

$$c_m = b_n + b_{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9)$$

ist. Bei der Integration treten für jeden Ast 2 Integrationsfreiwerte auf, mit deren Hilfe man den Verlauf der elastischen Linie den Randbedingungen (Auflagerbedingungen) anpassen kann.

Kontinuierlich mit Masse belegte Wellen mit variablem Trägheitsmoment lassen sich mit diesem Verfahren berechnen, indem man die kontinuierliche Massenbelegung in eine Reihe von gleichwertigen Einzelmassen zerlegt. Ebenso lassen sich mehrfach gelagerte Wellen damit untersuchen. Dabei zeigen sich erst die Vorteile des Verfahrens, weil die Entwicklung des Trägheitsmomentenverlaufs nur einmal gemacht zu werden braucht und bei allen Lastfällen, die man zur Ermittlung der statisch unbestimmten Lagerkräfte braucht, wieder verwendet werden kann. 903

Knickfestigkeit eines ebenen Systems beliebig vieler Stäbe, die in einem Knotenpunkte zusammenstoßen.

Von *Konrad Ludwig* in Hannover.

In einer Ebene liegen beliebig viele Stäbe, die in einem gemeinschaftlichen Knotenpunkte starr miteinander verbunden sind. Der andere Endpunkt jedes Stabes ist in einem Gelenk gelagert. Jeder Stab soll gegen ein Ausknicken in der Ebene fest sein. Daher ist nur ein Ausknicken senkrecht zur Ebene möglich, so daß jeder Stab zu einer ebenen Kurve verformt wird. Wählt man in der Ebene durch den ausgeknickten j-Stab das Gelenk als 0-Punkt eines kartesischen Koordinatensystems, bezeichnet das Trägheitsmoment seines Querschnittes in bezug auf die durch den Querschnittsschwerpunkt gehende Achse parallel zur Ebene der nicht ausgeknickten Stäbe mit I_j und seine Knickkraft mit P_j, so ist die Differentialgleichung des ausgeknickten Stabes

$$E\,I_j\frac{d^2 y_j}{d\,x_j^2}=-y_j\,P_j\,.$$

Mit der Abkürzung

$$\sqrt{\frac{P_j}{E\,I_j}}=\lambda_j$$

wird das allgemeine Integral der Differentialgleichung

$$y_j=A_j\sin\lambda_j\,x_j+B_j\cos\lambda_j\,x_j\,.$$

Die Randbedingung im Gelenk ergibt

$$y_j=A_j\sin\lambda_j\,x_j\,.$$

Bezeichnet man die Länge des j-Stabes mit l_j und die Verschiebung des Knotenpunktes mit f, so wird die Gleichung des ausgeknickten Stabes

$$y_j=\frac{f}{\sin\lambda_j\,l_j}\sin\lambda_j\,x_j\,.$$

Hiernach ist die Ausknickung proportional der Knotenpunktsverschiebung. Daher ist ohne Knotenpunktsverschiebung kein Ausknicken möglich. Die Steigung im Knotenpunkte ist

$$\left(\frac{d\,y_j}{d\,x_j}\right)_{x_j=l_j}=f\,\lambda_j\operatorname{ctg}\lambda_j\,l_j\,.$$

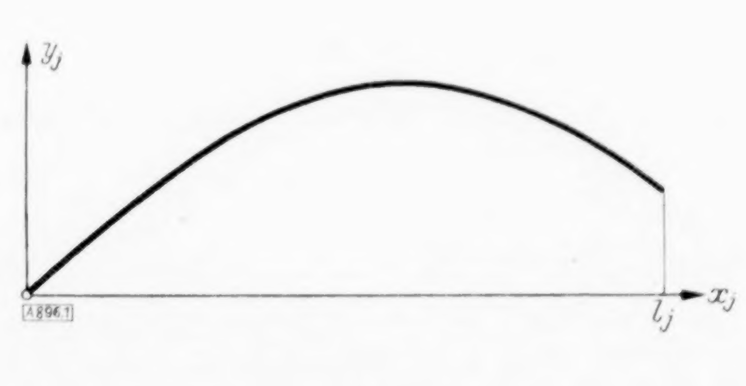


Abb. 1.

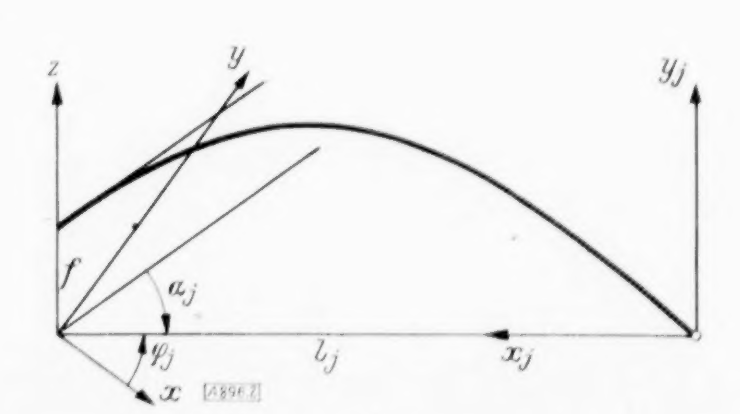


Abb. 2.

Wegen der starren Verbindung der Stäbe in ihrem gemeinschaftlichen Knotenpunkte liegen die Tangenten aller ausgeknickten Stäbe im Knotenpunkte in einer Ebene, d. h. jeder ausgeknickte Stab steht im Knotenpunkte auf der Normalen dieser Ebene senkrecht. Die Ebene der nicht ausgeknickten Stäbe wird als (x, y)-Ebene gewählt und die positive z-Achse so (Abb. 2), daß sich auf ihr der Knotenpunkt verschiebt. In diesem Koordinatensystem werden die Richtungscos jener Normalen mit u, v und w bezeichnet. Um die Richtungscos des j-ausgeknickten Stabes im Knotenpunkte zu berechnen, wird seine Tangente im Knotenpunkte so verschoben, daß sie durch den 0-Punkt geht, in dem der Knotenpunkt vor der Ausknickung liegt. Der Winkel zwischen der Tangente und der x_j-Achse wird mit $-\alpha_j$ bezeichnet:

$$\operatorname{tg}\alpha_j=-f\,\lambda_j\operatorname{ctg}\lambda_j\,l_j\,.$$

Das 3-Kant aus der verschobenen Tangente, der x_j-Achse und der x-Achse ist rechtwinklig. Der Richtungscos der Tangente gegen die x-Achse ist nach dem cos-Satz der Seiten

$$\cos\varphi_j \cos\alpha_j .$$

Entsprechend ist der Richtungscos der Tangente gegen die y-Achse

$$\sin\varphi_j \cos\alpha_j .$$

Der Richtungscos der Tangente gegen die z-Achse ist

$$\sin\alpha_j .$$

Wird in der (x_j, y_j)-Ebene das Quadrat der Steigung gegen 1 vernachlässigt, so vereinfachen sich die Richtungscos der Tangente zu

$$\cos\varphi_j \quad \sin\varphi_j \quad \operatorname{tg}\alpha_j .$$

Aus der Orthogonalitätsbedingung folgt

$$\cos\varphi_j\, u + \sin\varphi_j\, v + \operatorname{tg}\alpha_j\, w = 0 .$$

Wird die Anzahl der Stäbe mit n bezeichnet, so ist der Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \operatorname{tg}\alpha_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \operatorname{tg}\alpha_2 \\ \vdots & & \\ \cos\varphi_n & \sin\varphi_n & \operatorname{tg}\alpha_n \end{pmatrix}$$

≤ 2. Demnach ergeben sich die $n-2$ Gleichungen

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \operatorname{tg}\alpha_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \operatorname{tg}\alpha_2 \\ \cos\varphi_k & \sin\varphi_k & \operatorname{tg}\alpha_k \end{vmatrix} = 0 \qquad k = 3, 4, \ldots, n .$$

Hierin werden für $\operatorname{tg}\alpha_j$ die Werte eingesetzt

$$\begin{vmatrix} \cos\varphi_1 & \sin\varphi_1 & \lambda_1 \operatorname{ctg}\lambda_1 l_1 \\ \cos\varphi_2 & \sin\varphi_2 & \lambda_2 \operatorname{ctg}\lambda_2 l_2 \\ \cos\varphi_k & \sin\varphi_k & \lambda_k \operatorname{ctg}\lambda_k l_k \end{vmatrix} = 0 .$$

Die Determinante wird ausgerechnet

$$\sin(\varphi_k - \varphi_2)\,\lambda_1 \operatorname{ctg}\lambda_1 l_1 - \sin(\varphi_k - \varphi_1)\,\lambda_2 \operatorname{ctg}\lambda_2 l_2 + \sin(\varphi_2 - \varphi_1)\,\lambda_k \operatorname{ctg}\lambda_k l_k = 0 .$$

Diese $n-2$ Stabilitätsbedingungen ergeben zusammen mit den beiden Gleichgewichtsbedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} P_j \cos\varphi_j = 0 \qquad \sum_{j=1}^{n} P_j \sin\varphi_j = 0$$

n Gleichungen für die n Knickkräfte.

Der Fall $n = 3$, in dem nur eine Stabilitätsbedingung auftritt, wurde von L. Vianello, Knickfestigkeit eines dreiarmigen ebenen Systems, Zeitschrift des Vereins Deutscher Ingenieure, 50. Band, Berlin 1906, Seite 1753 behandelt. Der Fall $n > 3$ wurde von R. Mayer, Die Knickfestigkeit, Berlin 1921, Seite 109 versucht. Doch ist dort auf Seite 110 die Gl. (9) falsch, da sie gegen die Permutation

$$\begin{pmatrix} f_1 & f_2 & \ldots & f_n \\ f_2 & f_3 & \ldots & f_1 \end{pmatrix}$$

invariant sein müßte[1]). Auch bestimmen die ausgeknickten Stäbe mit ihrer Ebene vor dem Ausknicken keine Pyramide. Weiter folgt dort statt $n-2$ Stabilitätsbedingungen nur die eine Gl. (15). 896

[1]) Den Hinweis auf diese Gleichung verdanke ich Herrn Prof. Dr.-Ing. E. Kohl, Braunschweig.

Veranschaulichung und Anwendung der Minimalsätze der Elastizitätstheorie.

Von *C. Weber* in Dresden.

Der Satz vom Minimum der potentiellen Energie ist unabhängig vom Elastizitätsgesetze und auch für große Verschiebungen gültig[1]). Der Satz von Castigliano vom Minimum der Spannungsenergie gilt nur, wenn die Gleichungen zwischen den Verschiebungen, Zerrungen (Dehnungen und Schiebungen) linearisiert sind, also 1. für kleine Verschiebungen (u, v, w) und Zerrungen (ε, γ) und 2. nur für das Hookesche Gesetz.

Gelten diese Einschränkungen, so lassen sich beide Sätze, da dann Überlagerungen möglich sind, veranschaulichen.

Abb. 1 zeigt als Beispiel einen unbelasteten Körper, der links an eine starre Wand befestigt ist. Die Querstücke a und b seien starr; Wand und a sind mit drei elastischen Bändern verbunden, die hier als Federn dargestellt sind, ebenso a und b. Die beiden oberen Bänder haben dieselben elastischen Eigenschaften wie die unteren.

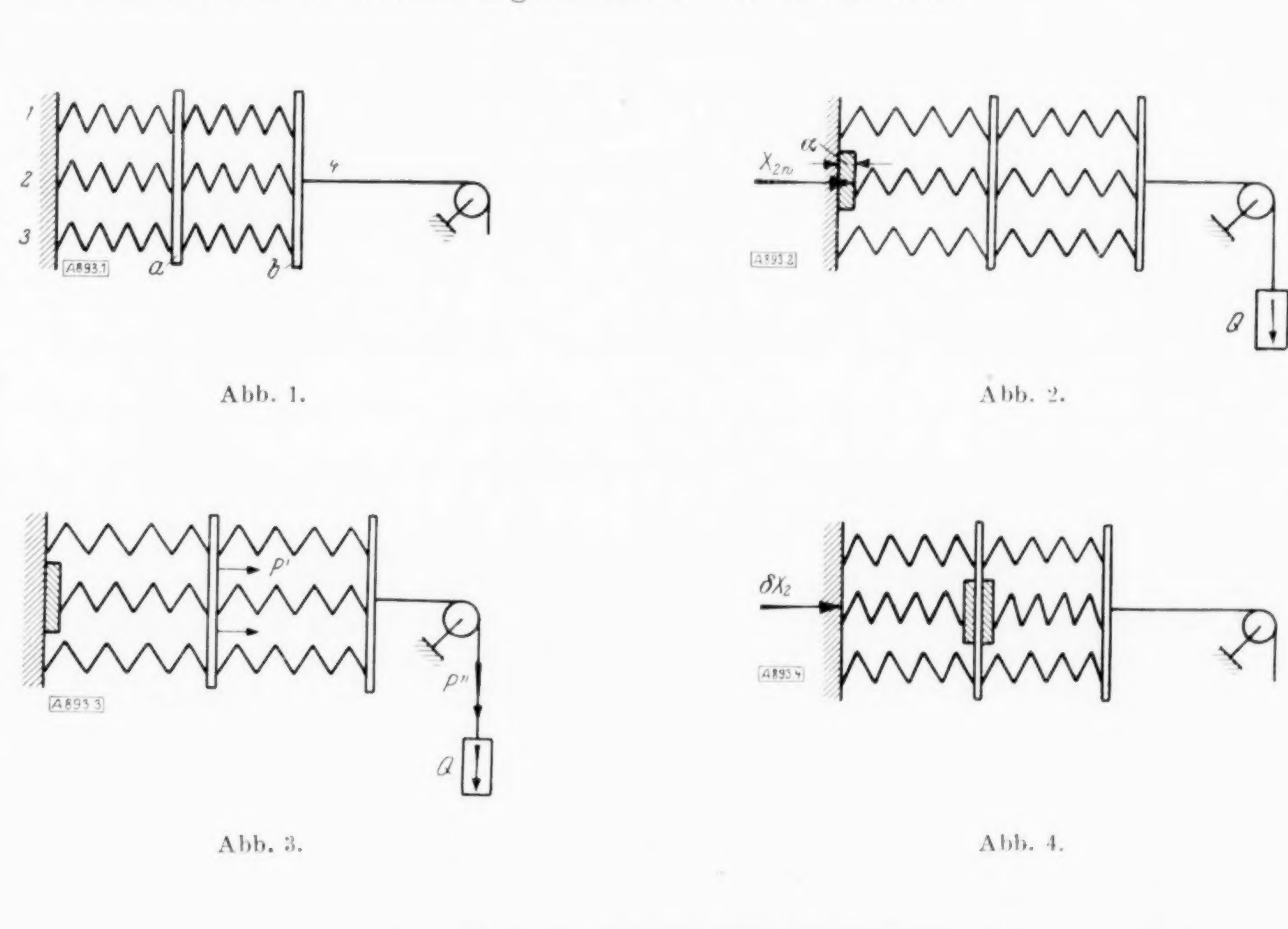


Abb. 1. Abb. 2.

Abb. 3. Abb. 4.

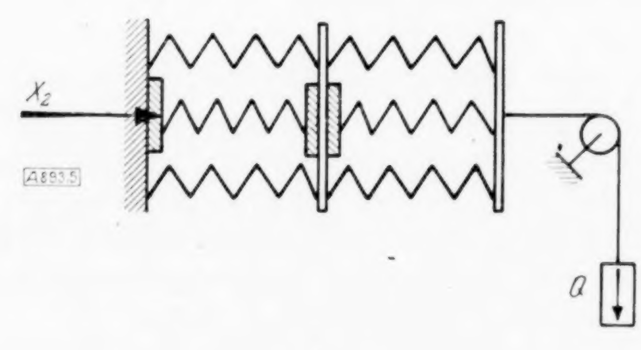


Abb. 5.

Der Körper sei nun verformt und belastet. An den Punkten 1, 2 und 3 schreiben wir die Verschiebungen

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = a, \qquad u_3 = 0$$

vor, am Punkte 4 bringen wir die Kraft $X_4 = Q$ an (Abb. 2). An allen übrigen Punkten sind ebenfalls die Kräfte (gleich Null) gegeben. Für alle Oberflächenpunkte sind hiermit entweder die Verschiebungen oder die Randkräfte bekannt.

Zu den vorgeschriebenen Randbedingungen gehört ein bestimmter Verschiebungszustand aller Punkte; aus ihm lassen sich die Zerrungen und auf Grund des Hookeschen Gesetzes

[1]) Vorausgesetzt wird, daß der belastete elastische Körper im stabilen Gleichgewicht ist.

die Spannungen und hieraus die Formänderungsarbeit A_w, ausgedrückt durch die Verschiebungen, angegeben. Die Formänderungsarbeit ist gleich der Arbeit der äußeren Kräfte, hier

$$\frac{1}{2} X_2 \cdot u_{2w} + \frac{1}{2} X_4 \cdot u_{4w} = \frac{1}{2} X_2 \cdot a + \frac{1}{2} Q \cdot u_{4w}$$

(der Index w bezieht sich auf die „wirkliche Lösung").

Zu den vorgeschriebenen Randverschiebungen

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = a, \qquad u_3 = 0$$

lassen sich noch beliebig andere Verschiebungszustände angeben. Berechnet man aus ihnen die Zerrungen und dann die Spannungen, so sind letztere weder untereinander noch mit den Randkräften im Gleichgewicht (Abb. 3).

Um diesen Zustand aus dem wirklichen zu erhalten, sind zusätzliche Kräfte anzubringen und zwar innere, P', um die inneren und äußeren, P'', um die äußeren Gleichgewichtsbedingungen zu befriedigen. Den zusätzlichen Verschiebungen $\delta u = u - u_w$ allein entsprechen Zerrungen und eine Formänderungsarbeit δA, die gleich der Arbeit dieser zusätzlichen Kräfte und damit größer als Null ist; also

$$\delta A = \frac{1}{2} \delta u' P' + \frac{1}{2} \delta u'' P''.$$

Nun stellen wir uns vor, daß der neue Zustand aus dem wirklichen entstanden ist, berücksichtigen die Arbeit der äußeren Kräfte und erhalten die Formänderungsarbeit des neuen Zustandes

$$A = A_w + \frac{1}{2} \delta u' P' + \frac{1}{2} \delta u'' P'' + Q (u_4 - u_{4w})$$

hieraus

$$A - Q u_4 \geqq A_w - Q u_{4w}$$

und zwar, weil stets die positive Arbeit der Zusatzkräfte hinzukommt, wenn man aus der rechten Seite die linke bildet.

Bezeichnen wir $A - Q \cdot u_4$ als potentielle Energie des Systems, so sehen wir, daß für den wirklichen Verschiebungszustand die potentielle Energie zum Minimum wird.

Zur Darstellung des Satzes von Castigliano gehen wir von den Spannungszuständen aus. Bei Verformung und Belastung nach Abb. 2 entstehen die Spannungen σ_w, τ_w, aus denen die Zerrungen mit Hilfe des Hookeschen Gesetzes berechnet werden können; aus diesen müssen sich Verschiebungen ergeben, die mit den vorgeschriebenen Randbedingungen in Einklang stehen. Aus den Spannungen bestimmen wir die aufgespeicherte Spannungsenergie

$$B_w (\sigma_w, \tau_w) = \frac{1}{2} X_2 \, a + \frac{1}{2} Q \, u_{4w}.$$

Wir betrachten nun wieder den unbelasteten und unverformten Körper; das heißt, die vorgeschriebenen äußeren Kräfte sollen gleich null und die vorgeschriebenen Randverschiebungen gleich null sein. Bei diesem Zustande nimmt man an, daß alle Spannungen null sind. Es könnten aber auch Anfangsspannungen $\delta\sigma$ und $\delta\tau$ vorhanden sein. Diese müssen die Gleichgewichtsbedingungen erfüllen sowohl im Innern, als auch an den Stellen, wo die Randkräfte null sind. An den Stellen, wo die Randverschiebungen null sind, könnten jedoch Spannungen auftreten. Zerlegt man den Körper dann in kleine spannungslose Teile, so passen sie nicht mehr zusammen. Aus den Anfangsspannungen $\delta \sigma$ und $\delta \tau$ läßt sich die Spannungsenergie δB berechnen.

Überlagern wir nun den Spannungs- und Formänderungszustand, der den Spannungen σ_w, τ_w entspricht, so erhält man eine neue Lösung von Spannungen $\sigma = \sigma_w + \delta \sigma$ und $\tau = \tau_w + \delta \tau$, die im Inneren im Gleichgewichte sind und am Rande den äußeren Kräften das Gleichgewicht halten. Umgekehrt kann man auch ein solches neues Spannungssystem σ, τ annehmen und dann $\delta \sigma = \sigma - \sigma_w$, $\delta \tau = \tau - \tau_w$ berechnen.

Abb. 5 veranschaulicht den Körper mit dem neuen Spannungszustande, Abb. 4 den Zustand, der den Anfangsspannungen entspricht. Eigentlich kann man den Verschiebungszustand gar nicht darstellen, da beim Zerlegen in kleine spannungslose Teile diese nicht mehr zusammenpassen. Hier ist das Vorhandensein von Anfangsspannungen dadurch angegeben, daß durch Ansätze am Querstück a die Bänder vorgespannt werden.

Der Spannungszustand nach Abb. 5 entsteht durch Überlagerung der Spannungszustände nach Abb. 2 und Abb. 4. Beim Zustande nach Abb. 4 ist die Spannungsenergie $\delta B > 0$ vorhanden.

Nehmen wir allmählich die Verformung und Belastung nach Abb. 2 vor, so wird im Punkte 4 die äußere Arbeit $\frac{1}{2}\,Q\,u_{4\,w}$ und im Punkte 2 die äußere Arbeit $\frac{1}{2}\,X_{2\,w}\,a + (X_2 - X_{2w})\,a$ dem Körper zugeführt, so daß zum Schlusse die Spannungsenergie $B(\sigma,\tau)$ im Körper aufgespeichert ist:

$$B = \delta B + \frac{1}{2}\,Q\,u_{4\,w} + \frac{1}{2}\,X_{2\,w}\,a + (X_2 - X_{2\,w})\,a\,.$$

Da

$$\frac{1}{2}\,Q\,u_{4\,w} + \frac{1}{2}\,X_{2\,w}\,a = B_w$$

ist, so folgt

$$B - P_2\,a \geqq B_w - P_{2\,w}\,a\,.$$

Ist insbesondere $a \doteq 0$, so folgt, daß für den wirklichen Spannungszustand die Spannungsenergie $B(\sigma,\tau)$ zum Minimum wird.

Anwendungen. 1. Es lassen sich aus den Minimalsätzen die jeweils bei der Herleitung nicht benutzten Grundgleichungen der Elastizitätslehre zurückgewinnen, also aus $A(u, v, w)$ die Gleichgewichtsbedingungen und aus $B(\sigma,\tau)$ die Beziehungen zwischen ε, γ und u, v, w.

2. Es lassen sich zweckmäßige Näherungslösungen aufstellen.

3. Für Stabilitätsprobleme kann nur der Satz vom Minimum der potentiellen Energie verwendet werden, wobei die Gleichungen nicht linearisiert werden dürfen.

4. Mit Hilfe beider Sätze läßt sich die Verschiebungsgröße des Angriffspunktes einer Einzelkraft, bzw. der Angriffsebene eines Kräftepaares eingrenzen. Dieses Verfahren läßt sich erweitern auf die Bestimmung der Verschiebung eines beliebigen Punktes.

Beides werde an Beispielen gezeigt.

Abb. 6 zeigt einen zweimal gestützten Balken, der in der Mitte durch die Kraft P belastet ist, von der Höhe h und der Breite $b \ll h$. In den Stützquerschnitten und im Belastungsquerschnitt seien versteifende Wände vorhanden, die in Richtung der äußeren Kräfte starr sind, so daß alle Punkte dieselben Verschiebungen v haben. In Richtung der Balkenachse kann die Verwölbung w beliebig sein; die Verschiebungen u senkrecht zur Bildebene sind nur gering und werden so bemessen, daß $\sigma_x = 0$ ist. Durch Einführung der versteifenden Wände wird die Frage nach den Verschiebungen sinnvoll.

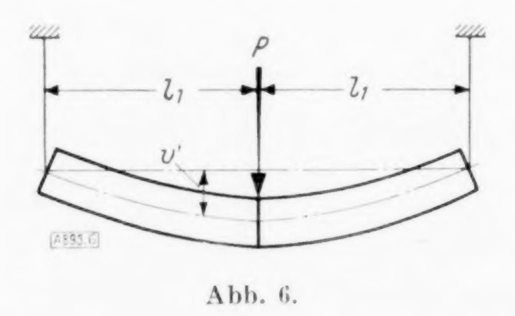


Abb. 6.

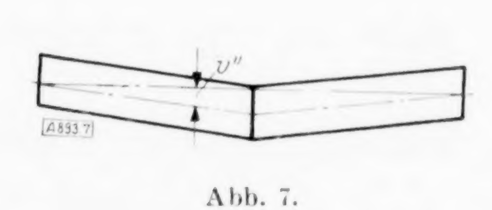


Abb. 7.

Der Verschiebungsansatz besteht aus folgenden zwei Teilen u', v', w' und u'', v'', w''.

1. Die Mittellinie der linken Balkenhälfte hat die Verschiebungen nach unten:

$$v' = v_m'\left[\frac{3}{2}\,\frac{z}{l_1} - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l_1}\right)^3\right].$$

In gleicher Weise mögen sich alle anderen Punkte eines jeden Querschnittes verschieben. Die Querschnitte stellen sich senkrecht zur Mittellinie ein, hieraus

$$\frac{\partial w'}{\partial y} = -\frac{\partial v'}{\partial z}\,; \qquad w' = -\frac{\partial v'}{\partial z}\cdot y$$

(y von der Mittellinie aus gerechnet). $\sigma_x' = 0$, hieraus die geringfügigen u'.

2. Die Querschnitte stellen sich schräg zu der Mittellinie nach Abb. 7.

$$v'' = v_m''\,\frac{z}{l_1}\,; \qquad u'' = 0\,, \qquad w'' = 0\,.$$

Im Gesamtansatze für die Formänderung befinden sich die beiden noch wählbaren Beiwerte v_m' und v_m''.

Man erhält die Formänderungsarbeit

$$A = v_m'^2 \frac{3JE}{(1-\mu^2)\,l_1^3} + v_m''^2\, FG/l_1 \qquad \text{mit} \qquad F = b \cdot h\,; \qquad J = \frac{1}{12}\, b h^3\,.$$

Nach dem Satze des Minimums der potentiellen Energie folgt

$$v_m'^2 \cdot \frac{3JE}{(1-\mu^2)\,l_1^3} + v_m''^2 \frac{FG}{l_1} - P\,(v_m' + v_m'') \geqq A_w - P \cdot v_{m\,w} = -\frac{1}{2}\, P\, v_{m\,w}$$

($v_{m\,w}$ — die wirkliche Durchbiegung des mittleren Querschnittes). Die günstigste Lösung erhalten wir, wenn wir die linke Seite möglichst klein machen. Aus dieser Minimalbedingung können v_m' und v_m'' bestimmt und eingesetzt werden. Man erhält

$$-\frac{1}{2}\, P^2 \left(\frac{1}{6}\, \frac{l_1^3\,(1-\mu^2)}{JE} + \frac{l_1}{2\,FG} \right) \geqq -\frac{1}{2}\, P\, v_{m\,w}\,.$$

Hieraus

$$v_{m\,w} \geqq P \left[\frac{1}{6}\, \frac{l_1^3\,(1-\mu^2)}{JE} + \frac{l_1}{2\,FG} \right].$$

Nun machen wir einen Ansatz für die Spannungen. Die Querkraft werde durch parabolisch verteilte Schubspannungen übertragen. Die Normalspannungen σ_z werden nach der gewöhnlichen Elastizitätslehre bestimmt.

Für die einzelnen Balkenteile läßt sich hieraus die Formänderung bestimmen. In der Mitte passen jedoch wegen der Verwölbung die Querschnittsflächen nicht zusammen und wegen der Querzusammenziehung nicht mit der eingefügten Querwand.

Der Ansatz gibt

$$v_{m\,w} \leqq P \left[\frac{1}{6}\, \frac{l_1^3}{JE} + \frac{1{,}2\, l_1}{2\,FG} \right].$$

Die Ansätze lassen sich selbstverständlich beliebig verfeinern.

$v_{m\,w}$ ist hiermit zwischen zwei Werten eingegrenzt.

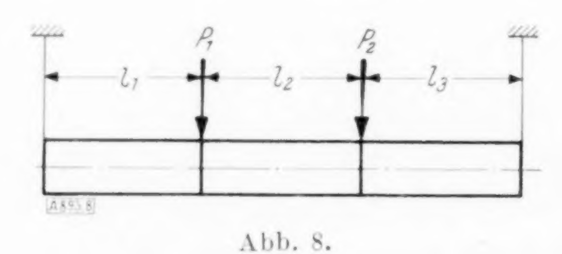


Abb. 8.

Nun soll ein Balken nach Abb. 8 durch zwei Lasten P_1 und P_2 belastet sein.

Durch die Kraft P_1 verschiebt sich der Angriffspunkt von P_1 um $c_{11} P_1$
von P_2 um $c_{12} P_1$.

Durch die Kraft P_2 verschiebt sich der Angriffspunkt von P_1 um $c_{12} P_2$
von P_2 um $c_{22} P_2$.

Die gesamte Verschiebung $v_{1\,w}$ ist also $c_{11} P_1 + c_{12} P_2$,

ebenso $v_{2\,w} = c_{12} P_1 + c_{22} P_2$.

Gesucht wird der Wert c_{12}.

Der Satz vom Minimum der potentiellen Energie gibt mit einem Ansatze ähnlich dem vorherigen:

$$\frac{1}{2}\, P_1 v_{1\,w} + \frac{1}{2}\, P_2 v_{2\,w} = \frac{1}{2}\, c_{11} P_1^2 + c_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2}\, c_2{}^2 P_2^2 \geqq a_{11} P_1^2 + 2\, a_{12} P_1 P_2 + a_{22} P_2^2 \qquad (1)$$

mit

$$a_{11} = \frac{(1-\mu^2)\, l_1^2\, (l_2 + l_3)^2}{6\,EJl} + \frac{l_1\,(l_2 + l_3)}{2\,GFl}\,,$$

$$a_{12} = \frac{(1-\mu^2)\, l_1\, l_3\, (l^2 - l_1^2 - l_3^2)}{12\,EJl} + \frac{l_1\, l_3}{2\,GFl}\,,$$

$$a_{22} = \frac{(1-\mu^2)\,(l_1 + l_2)^2\, l_3^2}{6\,EJl} + \frac{(l_1 + l_2) \cdot l_3}{2\,GFl}\,.$$

Der Satz vom Minimum der Spannungsenergie gibt

$$\frac{1}{2} P_1 v_{1w} + \frac{1}{2} P_2 v_{2w} = \frac{1}{2} c_{11} P_1^2 + c_{12} P_1 P_2 + \frac{1}{2} c_{22} P_2^2 \leqq \beta_{11} P_1^2 + 2 \beta_{12} P_1 P_2 + \beta_{22} P_2^2 \quad . \quad (2),$$

wobei sich die β von den a dadurch unterscheiden, daß bei den ersten Gliedern $(1-\mu^2)$ fortfällt, bei den zweiten der Faktor 1, 2 hinzutritt.

Aus (1) und (2) ist c_{12} so zu finden, daß es zwischen zwei Werten eingegrenzt ist.

In Ungleichung (2) setzen wir einmal P_2 gleich Null, dann P_1 gleich Null und ziehen die so erhaltenen Ungleichungen von Ungleichung (1) ab, so daß nur das Glied $c_{12} P_1 P_2$ links nachbleibt und das Ungleichungszeichen bestehen bleibt.

$$c_{12} P_1 P_2 \geqq -(\beta_{11} - a_{11}) P_1^2 + 2 a_{12} P_1 P_2 - (\beta_{22} - a_{22}) P_2^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (3).$$

Auf dieselbe Weise erhält man durch Vertauschung der Ungleichungen (1) und (2)

$$c_{12} P_1 P_2 \leqq \quad (\beta_{11} - a_{11}) P_1^2 + 2 \beta_{12} P_1 P_2 + (\beta_{22} - a_{22}) P_2^2 \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \quad (4).$$

Wir teilen die Ungleichungen (3) und (4) durch $P_1 P_2$, wobei die Ungleichungszeichen bestehen bleiben, wenn wir für P_1 und P_2 dasselbe Vorzeichen annehmen, andernfalls sind sie zu ändern. Beide Fälle sind getrennt zu untersuchen. Der erste Fall gibt

$$c_{12} \geqq -(\beta_{11} - a_{11}) \frac{P_1}{P_2} + 2 a_{12} - (\beta_{22} - a_{22}) \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1},$$

$$c_{12} \leqq \quad (\beta_{11} - a_{11}) \frac{P_1}{P_2} + 2 \beta_{12} + (\beta_{22} - a_{22}) \left(\frac{P_1}{P_2}\right)^{-1}.$$

Das Verhältnis P_1/P_2 ist so zu wählen, daß die rechten Seiten jeweils zum Extremum werden. Das gibt für beide Ungleichungen

$$\frac{P_1}{P_2} = \sqrt{\frac{\beta_{22} - a_{22}}{\beta_{11} - a_{11}}},$$

wobei die Wurzel für Fall 1 mit dem positiven Vorzeichen zu nehmen ist. Man erhält

$$2 a_{12} - 2 \sqrt{(\beta_{11} - a_{11})(\beta_{22} - a_{22})} \leqq c_{12} \leqq 2 \beta_{12} + 2 \sqrt{(\beta_{11} - a_{11})(\beta_{22} - a_{22})} \quad . \ . \ . \quad (5).$$

Wählt man für P_1 und P_2 verschiedene Vorzeichen, so erhält man

$$2 \beta_{12} - 2 \sqrt{(\beta_{11} - a_{11})(\beta_{22} - a_{22})} \leqq c_{12} \leqq 2 a_{12} + 2 \sqrt{(\beta_{11} - a_{11})(\beta_{22} - a_{22})} \quad . \ . \ . \quad (6).$$

Von beiden Ungleichungssystemen ist dasjenige zu wählen, das den Wert c_{12} stärker eingrenzt.

Für unser Beispiel ist β_{12} größer als a_{12}, so daß Ungleichungssystem (6) in Betracht kommt.

Für den symmetrischen Belastungsfall mit $l_3 = l_1$ erhält man

$$\frac{l_1^2 (l^2 - 2 l_1^2) - 2 \mu^2 l_1^2 (l - l_1)^2}{6 E J l} + \frac{l_1^2 - 0{,}2\, l_1 (l - 2 l_1)}{G F l} \leqq c_{12}$$

$$\leqq \frac{l_1^2 (l^2 - 2 l_1^2) + \mu^2 l_1^2 (l - 2 l_1)^2}{6 E J l} + \frac{l_1^2 + 0{,}2\, l_1 (l - l_1)}{G F l}.$$

Auf diese Weise kann man sowohl die Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft als auch eines anderen Punktes eingrenzen. Die Eingrenzungsspanne läßt sich durch Änderung der Ansätze beliebig verfeinern, wobei man die Verbesserung der Ansätze mit Hilfe der Anschauung vornehmen kann.

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr.-Ing. ERNST **BITTNER**, Momententafeln und Einflußflächen für kreuzweise bewehrte Eisenbetonplatten. Mit 16 Textabb. u. 81 Zahlentaf. Wien 1938, Verlag von Julius Springer. Preis geh.

Während die Berechnung von Platten für Vollast mit Hilfe der Marcusschen Beiwerte ν für praktische Bedürfnisse genügend genau und genügend einfach möglich ist, ist ein ähnlich einfaches Verfahren für Einzellasten bisher nicht gegeben worden. Hier wird dem Ingenieur ein Tafelwerk zur Verfügung gestellt, das bei hinreichend engen Tafelschritten eine Platte unter wandernden Einzellasten zu berechnen gestattet; für die Herstellung der Tafeln sind die genauen Ergebnisse der Plattentheorie verwertet, für den Gebrauch der Tafeln ist es aber nicht erforderlich, die Theorie selbst zu kennen. Die Einzellasten werden als Vollasten über kleine Rechtecke von bestimmten Abmessungen eingeführt. Am Schluß des Buches wird die Plattentheorie (im Anschluß an Nádai) so weit entwickelt, daß eine Nachprüfung und allfällige Ergänzung der Tafelwerte jederzeit möglich ist. Die Lösung für den eingespannten unendlichen Plattenstreifen und für die unendliche Kragplatte ist vom Verfasser selbst entwickelt worden. Das Werk wird für viele Zwecke der Praxis von Nutzen sein, die eine übersichtliche Verwertung der exakten Theorie verlangt, ohne in jedem Einzelfalle auf deren Entwicklungen Bezug zu nehmen.

Karlsruhe. Th. Pöschl. 853

H. **ERTEL**, Methoden und Probleme der dynamischen Meteorologie („Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete", herausgegeben v. d. Schriftleitung des „Zentralblatt für Mathematik", Bd. 5, Heft 3). 122 S. m. 14 Fig. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis brosch. 14 M.

Die dynamische Meteorologie will an Hand von Gedankenmodellen das physikalisch Wesentliche des Geschehens in der Erdatmosphäre herausarbeiten. Daß diese Aufgabe im allgemeinen schwerer ist als die entsprechende in manchen andern physikalischen Anwendungsgebieten, ist sofort klar, wenn man bedenkt, daß die Versuchsbedingungen in der Atmosphäre der menschlichen Beeinflussung entzogen sind. Es ist sehr dankenswert, daß H. Ertel jetzt einen Bericht vorlegt, der in gedrängter Kürze einen Überblick über dies entwicklungsfähige Gebiet gibt.

Im ersten Kapitel wird zunächst die Thermodynamik trockener und feuchter Luft, sowie die Strahlung in dem benötigten Umfang dargelegt. Danach werden die hydrodynamischen Gleichungen in Eulerscher und Lagrangescher Form aufgestellt. Im zweiten Kapitel über die allgemeine Dynamik der Atmosphäre werden insonderheit die beiden Tatsachen in die Betrachtung eingeführt, daß die meteorologischen Erscheinungen in einem rotierenden Koordinatensystem beobachtet werden und daß durch die Schwere die vertikale Koordinate ausgezeichnet ist. Dieses Kapitel gipfelt in der Besprechung des Zirkulationstheorems von Bjerknes und der atmosphärischen Energiebilanz. Bei der Behandlung spezieller Probleme im dritten Kapitel ist in der atmosphärischen Statik auf die thermodynamische Ableitung der Bedingung für stabile Schichtung hinzuweisen. Natürlich finden in der atmosphärischen Dynamik die Windverteilung über dem Erdboden, die eng mit dem Turbulenzproblem zusammenhängt, ferner die Theorie der Diskontinuitäten sowie die atmosphärischen Störungsgleichungen und das Zyklonenproblem eine ausführliche Besprechung.

Der Verfasser hat es ausgezeichnet verstanden, einen Überblick über die Ergebnisse und Probleme eines weitverzweigten Forschungsgebietes zu geben. Besonders wertvoll sind die ausgedehnten Literaturangaben.

Dresden. W. Tollmien. 851

Grimsehls Lehrbuch der Physik, neubearb. von Professor Dr. R. **TOMASCHEK**, Direktor d. Phys. Inst. d. Techn. Hochsch. Dresden, II. Bd., 2. Teil, Materie und Äther, 8. Aufl., VIII + 456 S. m. 339 Abb. Leipzig und Berlin 1938, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 14 M.

Der vorliegende Schlußband des Grimsehlschen Lehrbuches ist eine völlige Neuschöpfung des Herausgebers; die darin behandelten Probleme standen zu Lebzeiten Grimsehls, der ja im Oktober 1914 als Vierundfünfzigjähriger in Flandern gefallen ist, bestenfalls in den ersten Anfängen ihrer Entwicklung. Die Eigenart des alten „Grimsehl" ist aber auch in diesem Bande gewahrt geblieben: das Hauptgewicht wird auf die Erfahrungstatsachen gelegt und erst im Anschluß daran Theorie gebracht. Wenn freilich der Verfasser im Vorwort betont, er habe sich bemüht, „niemals Tatsachen als Bestätigungen der Theorie auszugeben", so ist das wohl eine etwas mißverständliche Redeweise; Richtigkeit und Geltungsbereich einer Theorie können schließlich doch nur an Tatsachen geprüft und durch sie erwiesen werden. Auch aus der Darstellung des Verf. geht übrigens hervor, daß er dieses Verhältnis zwischen Theorie und Erfahrung durchaus anerkennt. In diesem Zusammenhang sei auf zwei kleine Inkorrektheiten hingewiesen. Die S. 200 gegebene Darstellung der Abhängigkeit der Masse von der Geschwindigkeit kann dahin mißverstanden werden, als ob jene Formel induktiv aus Versuchen gefolgert worden sei, während ja in Wirklichkeit die von der Relativitätstheorie gelieferte Formel an den Experimenten geprüft und durch sie bestätigt wurde. Umgekehrt wird auf S. 281 der Landésche Aufspaltungsfaktor als Ergebnis von Rechnungen gewonnen; hier wäre der Hinweis angebracht gewesen, daß Landé, dessen Name übrigens in diesem Zusammenhang gar nicht erwähnt wird, den Faktor durch eine glückliche Induktion aus Experimenten erschlossen hat. — Nun zum Inhalt des Buches. Man muß ihm vor allem nachrühmen, daß ein ungemein reichhaltiges Tatsachenmaterial in die Darstellung hineingearbeitet worden ist. Auf dem verhältnismäßig beschränkten Raume von 450 Seiten wird über eine solche Fülle von Einzeluntersuchungen berichtet, daß, wenn das Buch auch kein Lernbuch im eigentlichen Sinne des Wortes ist, es doch, namentlich auch dem älteren Studierenden, eine ausgezeichnete Orientierung und ein tieferes Eindringen in die darin behandelten Gebiete ermöglicht. Vortreffliche Abbildungen und anschauliche Skizzen, zahlreiche Diagramme und reichhaltiges Tabellenmaterial — das alles besonders auch deshalb eindrucksvoll, weil vielfach den Originalabhandlungen entnommen — unterstützen den Leser beim Studium aufs wirksamste. Dazu kommt, daß neben den experimentellen Forschungen auch die neueren Theorien durchaus zur Geltung gekommen sind. Es wird nicht nur das klassische Bohrsche Atommodell — in, wie mir scheint, etwas übertriebener Pietät als Lenard-Rutherford-Bohrsches Modell bezeichnet — mit aller Gründlichkeit und Klarheit behandelt, sondern die schöne, in sich geschlossene Darstellung des Abschnitts „Welle und Korpuskel" dringt bis zur Schrödingergleichung und ihren wichtigsten

Anwendungen vor und vermittelt auch dem Leser, der nicht über tiefere mathematische Vorkenntnisse verfügt, eine ausgezeichnete Vorstellung von der wellenmechanischen Deutung der Vorgänge in Atom und Molekül sowie der radioaktiven Vorgänge, wobei auch die Grundzüge der Gamowschen Theorie des β-Zerfalls gegeben werden. Gelegentlich wirkt sich m. E. die sorgfältige Vermeidung der Relativitätstheorie zum Nachteil einer sinnvollen Deutung der Erscheinungen aus. Daß Verfasser auf dem Boden der Äthervorstellung steht, was ja auch der Untertitel andeutet, ist für die meisten Kapitel ohne Belang, da dieser Äther, der zwar Substanz (d. h. Träger von Eigenschaften), aber nicht materielle Substanz sein soll, der aber andrerseits „körnige Struktur" besitzen soll, die sich im Auftreten des Planckschen Wirkungsquantums äußere, zur Deutung der Erscheinungen ebensowenig herangezogen wird wie der an zwei Stellen erwähnte Lenardsche „Uräther". Wie in den vorhergehenden Bänden finden sich auch in diesem Band biographische Angaben über eine Reihe von Forschern; die Auswahl scheint etwas zufälliger Natur gewesen zu sein. Leider sind die Angaben wesentlich kürzer und farbloser gehalten als namentlich im ersten Bande, wo sie meist recht gute Vorstellungen vom Wesen und Werk der einzelnen Forscher vermitteln. Angaben über Ernst Grimsehl, den Schöpfer des nunmehr abgeschlossenen Werkes, fand ich in keinem der drei Bände.

Berlin. E. Mosch. 857

Dr. phil. HARALD **GEPPERT**, o. Prof. d. Math. a. d. Univ. Gießen, und Dr. phil. habil. SIEGFRIED **KOLLER**, Vorstand d. Statistischen Abt. d. Kerckhoff-Instituts Bad Nauheim, Erbmathematik, Theorie der Vererbung in Bevölkerung und Sippe. VIII + 236 S. m. Abb. Leipzig 1938, Verlag Quelle & Meyer. Preis geb. 18 M.

In diesem Buch, das aus der gemeinsamen Arbeit eines Mathematikers und eines Biologen hervorgegangen ist, werden die wahrscheinlichkeitstheoretischen Zusammenhänge im biologischen Geschehen von Familie, Sippe, Volk und Rasse dargestellt; die statistischen Methoden der Biologie bleiben also außer Betracht. Die „Erbmathematik" kann den Fachleuten beider Disziplinen bestens empfohlen werden: Der Biologe findet darin eine ausführliche Entwicklung der für seine Arbeit wichtigen Verfahren der Wahrscheinlichkeitsrechnung, und dem Mathematiker bietet das Buch von Geppert und Koller vielerlei Anregung, an der Lösung dringlicher und zugleich mathematisch reizvoller Aufgaben der Biologie mitzuarbeiten. Allerdings bin ich nicht davon überzeugt, daß ein Leser, der nur die üblichen mathematischen Schulkenntnisse mitbringt, der Darstellung überall zu folgen vermag (wie die Verfasser meinen); er muß zum mindesten die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung beherrschen und darüber hinaus mit dem Rechnen mit Zahlenfolgen etwas vertraut sein. Für den, der den Vormarsch des Mathematikers in die Bereiche der Biologie mit Mißtrauen beobachtet, sei ausdrücklich bemerkt, daß die Verfasser der „Erbmathematik" keineswegs eine abstrakte mathematische Theorie gezüchtet haben, sondern überall in engstem Kontakt mit der biologischen Wirklichkeit bleiben; das zeigen die gewissenhafte Untersuchung der Grenzen, innerhalb deren die Theorie den tatsächlichen Verhältnissen gerecht zu werden vermag, die vielfache Prüfung der Theorie durch Gegenüberstellung mit Beobachtungsergebnissen und die Anwendung auf viele Fragen von unmittelbar praktischem Interesse (Verhütung erbkranken Nachwuchses, Inzucht, Rassenmischung und -entmischung, Abstammungsprüfung). Die „Erbmathematik" ist folgendermaßen gegliedert: I. Die Mendelschen Regeln. II. Das Erbgefüge einer Bevölkerung bei völliger Durchmischung. III. Natürliche und künstliche Auslese in einer Bevölkerung. IV. Das Erbgefüge einer Sippe in einer beständigen Bevölkerung. V. Erbbegutachtung. Die Beiträge des Mathematikers und die des Biologen sind so gut aufeinander abgestimmt, daß eine „Abstammungsprüfung" hier gewiß nicht zum Ziel führen würde!

Freiberg (Sa.). Grüß. 878

Dr. SIEGFRIED **VALENTINER**, Prof. f. Physik a. d. Bergakademie Clausthal, Vektoranalysis (Sammlung Göschen Bd. 354). 5. erneut durchgesehene Aufl., 136 S. m. 13 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 1,62 M.

Die vorliegende Auflage des als erste Einführung in das Gebiet der Vektoranalysis durchaus zu empfehlenden Bändchens ist im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der in Band 10 (1930) S. 309 dieser Zeitschrift besprochenen vierten Auflage.

Willers. 892

CZUBER-BURKHARDT, Die statistischen Forschungsmethoden. 3. erweit. Aufl. Herausgeg. von F. Burkhardt, Prof. a. d. Univ. Leipzig. XVI + 330 S. m. 38 Fig. i. Text. Wien 1938, Verlag L. W. Seidel u. Sohn. Preis geb. 13,50 M.

Die deutsche Literatur ist nicht reich an guten Lehrbüchern der mathematischen Statistik. Um so mehr ist es zu begrüßen, daß das vielbenutzte Werk von E. Czuber nunmehr in dritter erweiterter Auflage, bearbeitet von F. Burkhardt-Leipzig, vorliegt. Die Anlage des Werkes sowie die mathematische Darstellung ist im wesentlichen dieselbe geblieben (vgl. die Besprechung Zamm 3, 1923, S. 327). Die Erweiterungen betreffen u. a. die Bevölkerungsstatistik, die Zerlegung von Zeitreihen und geldliche Ausgleichsprobleme. Wünschenswert wäre eine Berücksichtigung der Anwendungen der Statistik in der Technik und Industrie (Probleme des Fernsprechverkehrs, Verfahren der Fabrikationsüberwachung).

Berlin. Günther Schulz. 844

Ferner sind bei der Schriftleitung folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten):

Professor PAUL B. **FISCHER**, Studienrat am Gymnasium Berlin-Steglitz, Arithmetik (Sammlung Göschen, Nr. 47). 152 S. m. 19 Abb. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis 1,62 M.

Der feste Körper, Vorträge a. d. Tagung der Physik. Gesellsch. Zürich anläßlich der Feier ihres 50jährigen Bestehens, m. einem Vorwort von R. **SÄNGER**, Präsident der Physikal. Gesellsch. Zürich. V + 154 S. m. 30 Fig. Leipzig 1938, Verlag S. Hirzel. Preis kart. 7 M.

Dr. GERHARD **KOWALEWSKI**, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Dresden, Grundbegriffe und Hauptsätze der höheren Mathematik insbesondere für Ingenieure und Naturforscher. 156 S. m. 40 Fig. Berlin 1938, Verlag Walter de Gruyter & Co. Preis geb. 5 M.

Dr. Ing. FRIEDRICH **TÖLKE** VDI, o. Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Talsperren, Staudämme und Staumauern (Wasserkraftanlagen 2. Hälfte, I. Teil der Handbibliothek für Bauingenieure, III. Teil, 9. Bd.). XI + 734 S. m. 1189 Abb. im Text. Berlin 1938, Verlag Julius Springer. Preis geb. 78 M.

NACHRICHTEN

Internationaler Kongreß für angewandte Mechanik in Cambridge (Mass.).

Die internationalen Kongresse für Angewandte Mechanik, die jetzt in vierjährigem Abstand stattfinden, sind seit ihrer Begründung im Jahre 1924 nicht mehr aus der Entwicklung dieser Wissenschaft fortzudenken. Der fünfte dieser Kongresse tagte in diesem Jahre vom 12. bis 16. September in Cambridge bei Boston im Staate Massachusetts der Vereinigten Staaten von Amerika. Gastgeber waren das Massachusetts-Institut of Technology und die Harvard University. In der schon traditionellen Weise fanden wegen der Überfülle der Vorträge gleichzeitig drei Sektionssitzungen statt. Die erste Sektion beschäftigte sich mit Elastizität und Festigkeitslehre, die zweite mit Hydrodynamik, während in der dritten Sektion sonstige Fragen der Mechanik, wie Schwingungen, Schmierung, Flugzeugdynamik, Wärmeübertragung, Flußbaufragen und manches andere behandelt wurden. Außerdem fanden gemeinsam für alle Sektionen sechs allgemeine Vorträge statt, deren Themen angedeutet werden mögen. Sverdrup sprach über Ozeanzirkulation, Chatfield über Angewandte Mechanik und Flugzeugbau, Taylor über neuere Entwicklungen im Turbulenzproblem, Körber über das Verhalten metallischer Werkstoffe bei kleinen Verformungen, Pérès über die Verwendung von Gleichnissen (z. B. elektrischer Art) in der Angewandten Mechanik und schließlich Hardy Cross über Probleme der Baukonstruktionen. In den Sitzungen der ersten Sektion standen die elastischen Stabilitätsprobleme und damit die Ansätze für endliche Verformungen sehr im Vordergrund. In der zweiten Sektion wurde das Turbulenzproblem besonders ausgiebig erörtert, wofür eigens eine mehrtägige Aussprache in dem „Turbulence Symposium“ vorgesehen war. Erfreulicherweise ist es diesmal wieder möglich, längere Auszüge der Vorträge und sogar einen Teil der Diskussionsbemerkungen durch den Druck der weiteren Fachwelt zugänglich zu machen.

An den Kongreß schlossen sich ausgedehnte Besichtigungen an. In New York wurden bemerkenswerte Ingenieurbauten besichtigt, in Washington das National Bureau of Standards, das etwa der deutschen Physikalisch-Technischen Reichsanstalt entspricht, und in Langley Field die ausgedehnten Luftfahrtforschungsanstalten des National Advisory Committee of Aeronautics.

Wie man aus diesem kurzen Bericht sieht, ist der Kongreß dank der großzügigen Gastfreundschaft der amerikanischen Fachgenossen, die sich natürlich auch in geselligen Veranstaltungen kundtat, zur vollen Befriedigung aller Teilnehmer im Geiste einer echten, sachlich begründeten internationalen Zusammenarbeit verlaufen.

Dresden. W. Tollmien. 911

Hauptversammlung der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung.

Die diesjährige Hauptversammlung der Lilienthal-Gesellschaft für Luftfahrtforschung fand vom 12. bis 15. Oktober in Berlin statt. Die Versammlung war wesentlich stärker besucht als die vorangehenden. Von den allgemeinen Vorträgen werden den Leserkreis dieser Zeitschrift interessieren: I. I. Sikorsky: Das Großflugboot, E. Heinkel: Erhöhung der Geschwindigkeit der Flugzeuge in den letzten Jahren, W. Findeisen und L. Ritz: Vereisung, A. Ferri: Untersuchungen und Versuche im Überschallwindkanal zu Guidonia. Von den Sektionsvorträgen seien die folgenden besonders hervorgehoben: C. Minelli: Das energetische Verfahren in der Flugzeugstatik, F. Bollenrath: Zeit- und Dauerfestigkeit der Werkstoffe, O. Nissen: Festigkeitsfragen bei der Gestaltung neuzeitlicher Flugzeuge, W. G. A. Perring: Neuere Luftschraubenuntersuchungen in England mit besonderer Berücksichtigung des Startproblems, F. Haus: Aerodynamische Grundlagen der selbsttätigen Stabilisierung, H. W. Kaul: Statistische Erhebungen über Betriebsbeanspruchungen von Flugzeugflügeln, E. Schmidt: Die graphische Berechnung der Vergleichsprozesse von Verbrennungsmotoren unter Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmen, C. Cremona: Bericht über Untersuchungen und Versuche im Schleppkanal zu Guidonia, H. N. Garner: Neuere Versuche an Flugbooten und Flugbootmodellen, S. Truscott: Mitteilungen über den vergrößerten NACA-Schleppkanal und hier ausgeführte Versuche, W. Sottorf: Start und Landung im Modellversuch. — Die Vorträge werden gesammelt herausgegeben.

Berlin. I. Flügge-Lotz. 912

Der a. o. Prof. a. d. Technischen Hochschule Darmstadt, Dr. Kurt Schmieden, wurde zum o. Prof. der Mathematik an dieser Hochschule ernannt.

Der Dozent für Mathematik und Grundlagen der Theoretischen Physik an der Universität Köln, Dr. Hubert Cremer, wurde zum a. o. Prof. daselbst ernannt.

Der ord. Prof. der Darstellenden Geometrie an der Technischen Hochschule Braunschweig, Dr. Heinrich Timerding, wurde wegen Erreichens der Altersgrenze von seinen amtlichen Verpflichtungen entbunden.

Der Dozent für Mathematik und für mathematisch-technische Grenzgebiete Dr.-Ing. Wilhelm Quade wurde zum a. o. Professor ernannt.

Der ord. Professor für angewandte Mathematik an der Universität Jena, Dr. Max Winkelmann, wurde von seinen amtlichen Verpflichtungen entbunden (emeritiert).

Für den Textteil verantwortlich: Professor Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —

— Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.

A. Bezugsbedingungen:

Die „Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik" erscheint jeden zweiten Monat (Februar, April, Juni usw.)

Die Bezugszeit ist halbjährig (Ausland ganzjährig).

Der Bezugspreis beträgt ½jährlich **15.— RM.**; ganzjährig **30.— RM.**
für Mitglieder „ **13.50 RM.**; „ **27.— RM.**

Bestellung kann bei jeder Buchhandlung oder beim Verlag aufgegeben werden.

Abbestellung ist nur am Schluß eines Halbjahres bezw. Jahres zulässig. Nicht befristete Bestellungen laufen von Halbjahr zu Halbjahr weiter (Ausland von Jahr zu Jahr).

Bezugsgebühren sind stets zu Beginn eines neuen Halbjahres oder Jahres fällig und werden bei Ausbleiben der Zahlung durch Nachnahme eingezogen.

Lieferung unter Streifband.

Einzelheftpreis: 6.— RM., für Mitglieder 5.40 RM. zuzüglich 15 Rpf. Postgeld.

VDI-Literaturkartei: Auf Wunsch erhalten unsere Bezieher unberechnet Karteikarten über den Inhalt sämtlicher Zeitschriften des VDI in monatlichen Zusammenstellungen gegen Erstattung der jährlichen Versandkosten von 1.— RM.

ZUR BEACHTUNG

Lieferstörungen werden am schnellsten beseitigt, wenn das Ausbleiben der Zeitschrift umgehend mitgeteilt wird.

Um- und Abbestellungen sind zweckmäßig stets dorthin zu richten, wo die Bestellung aufgegeben wurde.

Bei Zuschriften und Zahlungen wird um genaue Angabe der vollständigen Anschrift und des Verwendungszweckes gebeten, da nur dadurch Verwechslungen und Lieferstörungen vermieden werden.

B. Anzeigenpreise

Satzspiegel der 1/1 Seite 171/250 mm.
1/1 Seite 160.— RM, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 Seite anteilig.

Nachlaß: bei 3maliger Aufnahme im Jahr 3 vH, bei 6maliger Aufnahme im Jahr 5 vH.

Aufschläge für Vorzugsplätze nach vorheriger Vereinbarung laut Tarif. Erfüllungsort für beide Teile Berlin-Mitte.

VDI-VERLAG G. M. B. H., BERLIN NW 7, DOROTHEENSTR. 40

Fernsprecher: Sammel-Nr. 116171. Postscheckkonto: Berlin 102373, Wien 174439, Prag 77329, Budapest 59951, Warschau 194372. Bankverbindungen: Dresdner Bank, Depositen-Kasse 65, Berlin C 2, Wallstr. 5 bis 8. — Deutsche Bank, Stadtzentrale Abt. A, Berlin W 8, Mauerstraße 26/27. Drahtanschrift: Ingenieurverlag. Geschäftszeit: Montag bis Freitag 8 bis 17 Uhr, Sonnabend 8 bis 12³⁰ Uhr.